Examen 2

Exercice I : Table de vérité

1. On note pour simplifier $U = ((P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R))$ et $V = (P \Rightarrow (Q \vee R))$ On a la table de vérité suivante :

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow R$	$Q \vee R$	U	V
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V

Les colonnes de U et de V étant les mêmes, on a bien l'équivalence cherchée.

2. Réécrivons U et V en supprimant les signes d'implications. On a :

$$\begin{aligned} U = ((P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R)) &\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee \neg P \vee R) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \vee R)) \\ &\Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \vee R)) = V \end{aligned}$$

Exercice II : fonctions et quantificateurs

1. (a) aucune application ;
   (b) applications constantes ;
   (c) toutes les applications ;
   (d) applications surjectives.

2. (a) $f(x) = -x - 1$, $D_f = \mathbb{R}$;
   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $D_f = \mathbb{R}$;
   (c) pas un graphe : $(-1, 1)$ et $(-1, -1)$ sont tous les deux dans l'ensemble considéré ;
   (d) $f(x) = \sqrt{1 - (x + 1)^2}$, $D_f = [-2, 0]$.

Exercice III : images directes et images réciproques

1.

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

2. Soit $y \in f(A \cap A')$. Il existe $x \in A \cap A'$ tel que $y = f(x)$.
   — comme $A \cap A' \subset A$, alors $x \in A$ et $y = f(x)$, donc $y \in f(A)$;
   — comme $A \cap A' \subset A'$, alors $x \in A'$ et $y = f(x)$, donc $y \in f(A')$.

   Finalement, $y \in f(A)$ et $y \in f(A')$, donc $y \in (f(A) \cap f(A'))$, c'est-à-dire que $f(A \cap A') \subset (f(A) \cap f(A'))$.

3. Considérons le cas particulier où $f : \{0, 1\} \to \{0\}$. Avec $A = \{0\}, A' = \{1\}$, on a :

$$f(A \cap A') = f(\emptyset) = \emptyset$$

$$(f(A) \cap f(A')) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\}$$

   donc on n'a pas l'autre inclusion en général. Il est facile de voir que l'on peut créer des contre-exemples dès lors que f n'est pas injective.

4. On suppose f injective. Comme on a déjà montré une inclusion à la question 1., il suffit de montrer l'autre inclusion.

   Soit $y \in (f(A) \cap f(A'))$. Il existe donc $x \in A$ et $x' \in A'$ tels que $y = f(x) = f(x')$. Comme f est injective, on en déduit que nécessairement $x = x'$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in A \cap A'$ tel que $y = f(x)$. Et donc $y \in f(A \cap A')$, ce qui montre l'autre inclusion, et donc l'égalité cherchée.

5. Procédons directement par équivalences :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B \cap B') &\Leftrightarrow f(x) \in B \cap B' \\ &\Leftrightarrow (f(x) \in B) \text{ et } (f(x) \in B') \\ &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B)) \text{ et } (x \in f^{-1}(B')) \\ &\Leftrightarrow x \in (f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')) \end{aligned}$$

   d'où l'égalité cherchée.

Exercice IV : applications injectives, surjectives ou bijectives

1. L'application $g \circ f$ est l'application de E dans G définie par : $g \circ f(x) = g\,(f(x))$.

2. Supposons que $g \circ f$ est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$, et montrons que $x_1 = x_2$. On a :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$$

   (où la première implication vient du fait que g est une fonction, et la seconde de l'injectivité de $g \circ f$).

   Donc f est bien injective.

3. Supposons que $g \circ f$ est surjective. Soit $z \in G$, montrons que z a un antécédent par g (c'est-à-dire qu'il existe un élément $y \in F$ tel que $g(y) = z$).
   Comme $g \circ f$ est surjective, alors il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$. Il suffit de voir que $y = f(x)$ convient, donc g est bien surjective.

4. Comme $h \circ f = \mathrm{Id}_E$ est bijective, et donc injective, on en déduit que f est injective.
   Comme $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ est bijective, et donc surjective, on en déduit que f est surjective.
   La fonction f est donc injective et surjective : elle est bijective.

5. La réciproque est vraie. Il suffit de considérer la fonction $h = f^{-1}$.

Exercice V : limites et fonctions continues

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que la fonction g a pour limite a en x. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$. On cherche à trouver $\eta > 0$ tel que :
   $$\forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |a - g(y)| \leq \varepsilon$$
   Comme g est constante de valeur a, on a pour tout $y \in \mathbb{R}$: $|a - g(y)| = 0 \leq \varepsilon$. Ainsi, tout $\eta > 0$ convient, et on peut prendre $\eta = 1$ par exemple.

2. De même qu'en question 1., donnons-nous $x \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ a pour limite x en x. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche à trouver $\eta > 0$ tel que :
   $$\forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |x - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(y)| \leq \varepsilon$$
   Comme $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a donc : $|x - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(y)| = |x - y| \leq \eta$. Ainsi, $\eta = \varepsilon$ convient.

3. Procédons par récurrence sur d.
   Initialisation : si $d = 0$, alors la question 1. nous dit que h est bien continue.
   Hérédité : supposons que la fonction h_1 définie par $h_1(x) = a \cdot x^d$ est continue pour un certain $d \in \mathbb{N}$. Alors, la fonction h_2 définie par $h_2(x) = a \cdot x^{d+1}$ est le produit des deux fonctions continues h_1 (par hypothèse de récurrence) et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ (par la question 2.). Comme le produit de deux fonctions continues est continu, alors h_2 est continue.
   D'où la récurrence.

4. La fonction f est somme de fonctions continues, à savoir les fonctions h_i définies par $h_i(x) = a_i x^i$, pour $i \in \{0, \dots, d\}$. Donc f est continue.