**Feuille de TD n°1**

**Vrai-Faux 1.2 :**

On considère trois ensembles $A$, $B$ et $C$, sous-ensembles d'un même ensemble $E$. On veut montrer l'implication suivante :

$$[(A \cup C) \subset (B \cap C)] \Rightarrow [A \subset B] .$$

**Première méthode :** par raisonnement direct.

On **suppose que** l'assertion de gauche est vraie, et on **veut montrer que** l'assertion de droite est nécessairement vraie.

Supposons donc que $(A \cup C) \subset (B \cap C)$, et montrons que $A \subset B$. Pour cela, donnons-nous $x \in A$, et montrons que $x \in B$.

Comme $x \in A$ et que $A \subset (A \cup C)$ (par définition de l'union), alors nécessairement : $x \in A \cup C$.

Or, on a supposé que $(A \cup C) \subset (B \cap C)$. Ainsi, on en déduit que : $x \in B \cap C$.

On a l'inclusion $(B \cap C) \subset B$ (par définition de l'intersection), donc finalement : $x \in B$, ce qu'il fallait démontrer.

**Deuxième méthode :** par raisonnement par contraposée.

La contraposée repose sur l'équivalence tautologique, étant données $P$ et $Q$ deux assertions :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P) .$$

On **suppose que** l'assertion de droite est fausse, et on **veut montrer que** l'assertion de gauche est nécessairement fausse.

Supposons donc que $A \not\subset B$, et montrons que $(A \cup C) \not\subset (B \cap C)$. Pour cela, il suffit d'exhiber un élément de $A \cup C$ qui n'est pas dans $B \cap C$.

Comme $A \not\subset B$, alors il existe un élément $x$ tel que : $x \in A$ **et** $x \notin B$. Montrons que cet élément $x$ est le bon candidat pour l'élément que l'on cherche à exhiber.

Comme on a l'inclusion $A \subset (A \cup C)$ (par définition de l'union), alors nécessairement : $x \in A \cup C$.

On a de plus l'inclusion $(B \cap C) \subset B$ (par définition de l'intersection), donc nécessairement : $x \notin B \cap C$ (comme $x \notin B$ par hypothèse).

Finalement, l'élément $x$ vérifie : $x \in A \cup C$ et $x \notin A \cap B$, et donc $(A \cup C) \not\subset (B \cap C)$, ce qu'il fallait démontrer.

**Troisième méthode :** par raisonnement par l'absurde.

Le raisonnement par l'absurde repose sur l'équivalence tautologique, étant données $P$ et $Q$ deux assertions :

$$(\neg (P \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) .$$

On **suppose par l'absurde que** l'assertion de gauche est vraie et que l'assertion de droite est vraie, et on **veut montrer que** l'on a une contradiction.

Supposons donc que que $(A \cup C) \subset (B \cap C)$ et que $A \not\subset B$. Et on veut aboutir à une contradiction.

Comme $A \not\subset B$, alors il existe un élément $x$ tel que : $x \in A$ **et** $x \notin B$. Montrons que cet élément $x$ est le bon candidat pour l'élément que l'on cherche à exhiber.

Comme on a l'inclusion $A \subset (A \cup C)$ (par définition de l'union), alors nécessairement : $x \in A \cup C$.

On a de plus l'inclusion $(B \cap C) \subset B$ (par définition de l'intersection), donc nécessairement : $x \notin B \cap C$ (comme $x \notin B$ par hypothèse).

Finalement, l'élément $x$ vérifie : $x \in A \cup C$ et $x \notin A \cap B$, et donc $(A \cup C) \not\subset (B \cap C)$, d'où la contradiction.