Feuille de TD n°8

Exercice 15 :
On considère la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par : $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), \mathrm{ch}(t))$.
Les dérivées successives de γ sont données par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \gamma'(t) & = & (-\sin(t), \cos(t), \mathrm{sh}(t)) \\ \gamma''(t) & = & (-\cos(t), -\sin(t), \mathrm{ch}(t)) \\ \gamma'''(t) & = & (\sin(t), -\cos(t), \mathrm{sh}(t)) \end{array}\right.$$

On a les égalités :

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \cdot \mathrm{ch}(t) + \sin(t) \cdot \mathrm{sh}(t) \\ \sin(t) \cdot \mathrm{ch}(t) - \cos(t) \cdot \mathrm{sh}(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = 1 + \mathrm{sh}(t)^2 = \mathrm{ch}(t)^2.$$

$$\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2 = \mathrm{ch}(t)^2 + \mathrm{sh}(t)^2 + 1 = 2 \cdot \mathrm{ch}(t)^2.$$

$$\mathrm{Det}(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)) = (\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t) = 2 \cdot \mathrm{sh}(t).$$

On en déduit finalement la courbure et la torsion :

$$K(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{ch}(t)^2}.$$

$$T(t) = -\frac{\mathrm{Det}(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} = -\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)^2}.$$

Au passage, on a utilisé que la courbe est birégulière pour justifier l'expression de la torsion et de la courbure. Cela vient du fait que la fonction ch ne s'annule jamais, et donc que la quantité $\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|$ ne s'annule jamais non plus.

On se place en un point t_0. Le plan osculateur est le plan affine passant par le point $\gamma(t_0)$ et dirigé par les vecteurs $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$, c'est-à-dire le plan passant par $\gamma(t_0)$ et normal au vecteur $\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0)$. Son équation est donnée par $(\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0)) \cdot (M - \gamma(t_0)) = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{c} (x - \cos(t_0)) \cdot (\cos(t_0) \cdot \mathrm{ch}(t_0) + \sin(t_0) \cdot \mathrm{sh}(t_0)) \\ +(y - \sin(t_0)) \cdot (\sin(t_0) \cdot \mathrm{ch}(t_0) - \cos(t_0) \cdot \mathrm{sh}(t_0)) \\ +(z - \mathrm{ch}(t_0)) \end{array} = 0$$

Le premier vecteur du repère de Frenet est donné par un vecteur unitaire tangent à la courbe. Comme la courbe est régulière, le vecteur $\gamma'(t_0)$ est tangent à la courbe, et on pose donc :

$$\tau(t_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} = \left(\frac{-\sin(t_0)}{\mathrm{ch}(t_0)}, \frac{\cos(t_0)}{\mathrm{ch}(t_0)}, \frac{\mathrm{sh}(t_0)}{\mathrm{ch}(t_0)}\right).$$

Le second vecteur du repère de Frenet est donné par un vecteur normal à τ dans le plan osculateur. Comme la courbe est birégulière, le projeté de $\gamma''(t_0)$ sur l'hyperplan orthogonal à $\gamma'(t_0)$ convient, après renormalisation. Le vecteur projeté est donné par :

$$p(t_0) = \gamma''(t_0) - (\gamma''(t_0) \cdot \tau(t_0))\tau(t_0)$$
$$= \left(\frac{-\cos(t_0) \cdot \mathrm{ch}(t_0) + \sin(t_0) \cdot \mathrm{sh}(t_0)}{\mathrm{ch}(t_0)}, \frac{-\sin(t_0) \cdot \mathrm{ch}(t_0) - \cos(t_0) \cdot \mathrm{sh}(t_0)}{\mathrm{ch}(t_0)}, \frac{1}{\mathrm{ch}(t_0)} \right)$$

et on trouve facilement $\|p\|^2 = 2$ (soit directement par l'expression précédente, soit par théorème de Pythagore). On en déduit que le vecteur normal unitaire associé est :

$$\nu(t_0) = \left(\frac{-\cos(t_0) \cdot \mathrm{ch}(t_0) + \sin(t_0) \cdot \mathrm{sh}(t_0)}{\sqrt{2}\mathrm{ch}(t_0)}, \frac{-\sin(t_0) \cdot \mathrm{ch}(t_0) - \cos(t_0) \cdot \mathrm{sh}(t_0)}{\sqrt{2}\mathrm{ch}(t_0)}, \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{ch}(t_0)} \right).$$

Enfin, le dernier vecteur du repère de Frenet est donné par :

$$\beta = \tau \wedge \nu = \left(\frac{\cos(t_0) \cdot \mathrm{ch}(t_0) + \sin(t_0) \cdot \mathrm{sh}(t_0)}{\sqrt{2}\mathrm{ch}(t_0)}, \frac{\sin(t_0) \cdot \mathrm{ch}(t_0) - \cos(t_0) \cdot \mathrm{sh}(t_0)}{\sqrt{2}\mathrm{ch}(t_0)}, \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{ch}(t_0)} \right).$$

On vérifie que l'on a bien $\mathrm{Det}(\tau, \nu, \beta) = 1$ et que les vecteurs τ, ν, β sont bien deux-à-deux orthogonaux et de norme 1, ce qui se fait bien à l'ordinateur.