Feuille de TD n°7

Exercice 2 :

(c) : $|t|y' + (t-1)y = t^3$

En divisant par $|t|$ l'équation précédente, on se ramène à une équation de la forme $y' = f(t, y(y))$, où f est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Sur ces deux domaines, on pourra étudier des solutions maximales, et appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Sur $\mathbb{R}_+^*$: $y' = \frac{1-t}{t} y + t^2$

1. équation homogène : $y' = \frac{1-t}{t} y$. Il suffit de trouver une primitive de $\frac{1-t}{t} = 1/t - 1$. On voit facilement que $\ln(t) - t$ convient, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$y(t) = \lambda \exp\left(\ln(t) - t\right) = \lambda\, t \cdot e^{-t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. équation complète : on utilise la méthode de variation de la constante. Une fonction de la forme $y(t) = \lambda(t)\, te^{-t}$ est solution de l'équation complète si, et seulement si, on a :

$$\lambda'(t) = te^t$$

c'est-à-dire que $\lambda(t) = (t-1)e^t$ à une constante près. En particulier, la fonction $y(t) = t^2 - t$ est une solution particulière de notre équation complète.

Finalement, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$S_+ = \{y(t) = t^2 - t + \lambda\, te^{-t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Il existe une unique solution définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $y(1) = 2$, à savoir celle qui correspond à $\lambda = 2e$: $y(t) = t^2 - t + 2e \cdot te^{-t}$. L'existence et l'unicité étaient déjà assurées par le théorème de Cauchy–Lipschitz.

Sur $\mathbb{R}_-^*$: $y' = \frac{t-1}{t} y - t^2$

1. équation homogène : $y' = \frac{t-1}{t} y$. Il suffit de trouver une primitive de $\frac{t-1}{t} = 1 - 1/t$. On voit facilement que $-\ln(t) + t$ convient, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$y(t) = \lambda \exp\left(-\ln(t) + t\right) = \lambda\, \frac{e^t}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. équation complète : on utilise la méthode de variation de la constante. Une fonction de la forme $y(t) = \lambda(t) \frac{e^t}{t}$ est solution de l'équation complète si, et seulement si, on a :

$$\lambda'(t) = -t^3 e^{-t}$$

c'est-à-dire que $\lambda(t) = (t^3 + 3t^2 + 6t + 6)e^{-t}$ à une constante près. En particulier, la fonction $y(t) = t^2 + 3t + 6 + \frac{6}{t}$ est une solution particulière de notre équation complète.

Finalement, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ est :

$$S_- = \{y(t) = t^2 + 3t + 6 + \frac{6}{t} + \lambda\frac{e^t}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Sur tout $\mathbb{R}$:

Une fonction y solution sur $\mathbb{R}$ de notre équation est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (en particulier continue), qui est aussi une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ de notre équation. Il existe donc deux réels λ, μ tels que :

$$y(t) = \begin{cases} t^2 - t + \lambda\, te^{-t} & \text{si } t > 0 \\ t^2 + 3t + 6 + \frac{6}{t} + \mu\frac{e^t}{t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Les choix possibles pour λ et μ sont conditionnés par la continuité et la dérivabilité de y en 0.

1. continuité en 0 :

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0^-} y(t) = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } \mu \neq -6 \\ 0 & \text{si } \mu = -6 \end{cases} \end{cases}$$

   Le seul point technique ici est ce qui se passe en 0^-. Pour cela, on peut faire un développement asymptotique de $y(t)$. Suivant le développement limité de $e^t = 1 + t + \mathrm{o}(t)$ au voisinage de 0, on a en 0^- :

$$y(t) = t^2 + 3t + 6 + \frac{6}{t} + \frac{\mu}{t} + \mu + \mathrm{o}(1) = \frac{6+\mu}{t} + (6+\mu) + \mathrm{o}(1),$$

   se qui donne que $y(t)$ a une limite finie en 0^- si, et seulement si, $(6+\mu) = 0$, et que cette limite vaut alors $(6+\mu)$, donc 0. On a donc montré que nécessairement il existe une constante réelle λ telle que y est de la forme :

$$y(t) = \begin{cases} t^2 - t + \lambda\, te^{-t} & \text{si } t > 0 \\ t^2 + 3t + 6 + \frac{6-6e^t}{t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

2. dérivabilité en 0 : on calcule directement la dérivée à gauche et à droite de 0 par la limite du taux d'accroissement. Comme on a $y(0) = 0$, cela revient à calculer la limite de $y(t)/t$ en 0^+ et en 0^-.

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{y(t)}{t} = \lambda - 1 \\ \lim\limits_{t\to 0^-} \frac{y(t)}{t} = 0 \end{cases}$$

   Comme précédemment, la limite en 0^- est obtenue par développement limité de la fonction exponentielle en 0 (cette fois-ci à l'ordre 2) donné par $e^t = 1+t+t^2/2+\mathrm{o}(t^2)$. On a donc en 0^- :

$$y(t) = t^2 + 3t + 6 + \frac{6}{t} + \frac{-6}{t} - 6 - 3t + \mathrm{o}(t) = \mathrm{o}(t),$$

   et finalement $\frac{y(t)}{t} = \mathrm{o}(1)$ en 0^-.

Il y a une unique solution sur $\mathbb{R}$:

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ y(t) = \left\{ \begin{array}{cc} t^2 - t + te^{-t} & \text{si } t > 0 \\ t^2 + 3t + 6 + \frac{6-6e^t}{t} & \text{si } t < 0 \end{array} \right\} \right. .$$

En particulier, il n'existe pas de solution sur $\mathbb{R}$ telle que $y(1) = 2$.

(d) : $t^2 y' - y = t^2 - t + 1$

En divisant par t^2 l'équation précédente, on se ramène à une équation de la forme $y' = f(t, y(y))$, où f est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Sur ces deux domaines, on pourra étudier des solutions maximales, et appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Comme l'équation obtenue est la même, qu'on soit sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$, on n'est pas obligé de faire la même distinction que précédemment.

$y' = \frac{1}{t^2} y + \frac{t^2-t+1}{t^2}$

1. équation homogène : $y' = \frac{1}{t^2} y$. Il suffit de trouver une primitive de $\frac{1}{t^2}$. On voit facilement que $-1/t$ convient, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme :
$$y(t) = \lambda \exp\left(-\frac{1}{t}\right) = \lambda\, e^{-1/t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
2. équation complète : on utilise la méthode de variation de la constante. Une fonction de la forme $y(t) = \lambda(t)\, e^{-1/t}$ est solution de l'équation complète si, et seulement si, on a :
$$\lambda'(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2} e^{1/t}.$$
Pour résoudre cette dernière équation, on peut procéder de l'une des méthodes suivantes :
   - chercher directement une primitive de la forme $P(t) \cdot e^{-1/t}$, pour P un polynôme. Ceci revient en fait directement à chercher une solution particulière polynomiale à notre équation initiale. On trouve facilement que $P(t) = t - 1$ convient.
   - faire le changement de variable $u = 1/t$, ce qui nous ramène au calcul d'une primitive de $(1/u^2 - 1/u + 1) \cdot e^u$. Le terme en e^u s'intègre facilement, et le terme en $(1/u^2 - 1/u)e^u$ est directement la dérivée de $(1/u)e^u$. On retrouve le même résultat que précédemment. On pouvait aussi reconnaître qu'on intègre le produit d'une fraction rationnelle par une exponentielle, dont les primitives sont de la même forme.

   On obtient finalement que $\lambda(t) = (t - 1)e^{1/t}$ à une constante près. En particulier, la fonction $y(t) = t - 1$ est une solution particulière de notre équation complète.

Finalement, les ensembles de solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont :

$$S_+ = \{y(t) = t - 1 + \lambda\, e^{-1/t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

$$S_- = \{y(t) = t - 1 + \lambda\, e^{-1/t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Il existe une unique solution définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $y(1) = 2$, à savoir celle qui correspond à $\lambda = 2e$: $y(t) = t - 1 + 2e \cdot e^{-1/t}$. L'existence et l'unicité étaient déjà assurées par le théorème de Cauchy–Lipschitz.

Sur $\mathbb{R}$ entier :

Une fonction y solution sur $\mathbb{R}$ de notre équation est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (en particulier continue), qui est aussi une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ de notre équation. Il existe donc deux réels λ, μ tels que :

$$y(t) = \begin{cases} t - 1 + \lambda\, e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ t - 1 + \mu\, e^{-1/t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Les choix possibles pour λ et μ sont conditionnés par la continuité et la dérivabilité de y en 0.

1. continuité en 0 :
$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to 0^+} y(t) = -1 \\ \lim\limits_{t \to 0^-} y(t) = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } \mu \neq 0 \\ -1 & \text{si } \mu = 0 \end{cases} \end{cases}$$
Le seul point technique ici est que $\lim\limits_{t \to 0^+} (-1/t) = -\infty$ alors que $\lim\limits_{t \to 0^-} (-1/t) = +\infty$, et donc que $\lim\limits_{t \to 0^+} e^{1/t} = 0$ alors que $\lim\limits_{t \to 0^-} e^{-1/t} = +\infty$. On a donc montré que nécessairement il existe une constante réelle λ telle que y est de la forme :
$$y(t) = \begin{cases} t - 1 + \lambda\, e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ t - 1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

2. dérivabilité en 0 : on calcule directement la dérivée à gauche et à droite de 0 par la limite du taux d'accroissement. Comme on a $y(0) = -1$, cela revient à calculer la limite de $(y(t) + 1)/t$ en 0^+ et en 0^-.
$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{y(t)+1}{t} = 1 \\ \lim\limits_{t \to 0^-} \frac{y(t)}{t} = 1 \end{cases}$$
La limite en 0^- ne pose pas de problème. Pour la limite en 0^+, elle découle de l'égalité : $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{e^{-1/t}}{t} = 0$, qui est une conséquence directe de la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (avec le changement de variable $x = 1/t$).
Ainsi, peu importe la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction précédente est dérivable.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc des éléments de :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ y(t) = \begin{cases} t - 1 + \lambda\, e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ t - 1 & \text{si } t < 0 \end{cases} ,\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Au passage, on peut aussi constater que les fonctions ainsi obtenues sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par exemple, pour voir qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^1$, il suffit de voir que la limite de y' en 0^+ et en 0^- vaut 1 (ce qui est assez facile à faire). C'est une conséquence directe du fait que la fonction nulle sur $\mathbb{R}_-$ et valant $\exp(-1/t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, ce qui se montre facilement.

En particulier, il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ telle que $y(1) = 2$, à savoir celle obtenue avec $\lambda = 2e$, c'est-à-dire :

$$y(t) = \begin{cases} t - 1 + 2e\, e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ t - 1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$