Feuille de TD n°2 : différentiabilité

Exercice 5 : on considère la fonction f définie de R^2 dans R par :

$$f(x,y) = \min(x^2, y^2).$$

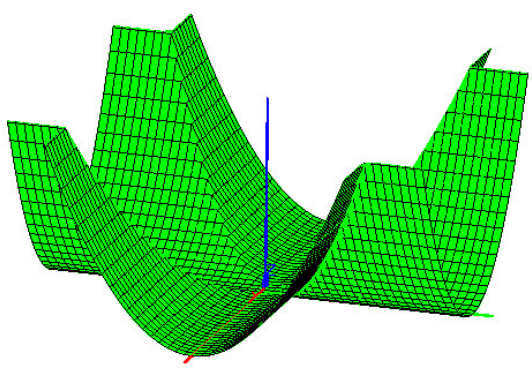
a) On voit facilement que la fonction f coïncide :

— avec la fonction $f_1(x,y) = x^2$ dans l'espace au dessus de la courbe d'équation $y = |x|$ ou en dessous de la courbe d'équation $y = -|x|$;

— avec la fonction $f_2(x,y) = y^2$ dans l'espace entre les deux courbes d'équations $y = |x|$ et $y = -|x|$.

La restriction du graphe de f aux droites d'équations $y = x$ ou $y = -x$ sont des paraboles. Pour avoir un joli tracé, on peut par exemple utiliser Xcas, qui nous donne le graphique suivant avec la commande :

```
plotfunc(min(x^ 2,y^ 2), [x=-5..5,y=-5..5],
      xstep=0.2,ystep=0.2,affichage=vert+rempli).
```



b) On se place au point $a = (x_0, x_0)$. Pour montrer que f n'est pas différentiable en a, on commence par regarder ses éventuelles dérivées partielles suivant le vecteur $v = (x, y)$. On a :

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \frac{\min(2x_0xt + t^2x^2, 2x_0yt + t^2y^2)}{t}.$$

Il est facile de voir que le quotient précédent n'a pas de limite quand t tend vers 0 dès lors que $x_0 \neq 0$ et que $x \neq y$. Un calcul simple donne les limites suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{t\to 0, t>0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} & = & \min(2x_0x, 2x_0y) \\ \lim\limits_{t\to 0, t<0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} & = & \max(2x_0x, 2x_0y) \end{array}$$

donc en particulier, ces quantités ne peuvent être égales si $x \neq y$, donc f n'admet pas de dérivée directionnelle suivant toute direction : f n'est pas différentiable.

On peut faire moins de calculs et voir que la fonction f n'admet pas de dérivée directionnelle suivant le $v = (1,0)$, puisque l'on a les limites :

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{t\to 0, t>0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} & = & \min(2x_0, 0) \\ \lim\limits_{t\to 0, t<0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} & = & \max(2x_0, 0) \end{array}$$

qui sont distinctes dès lors que $x_0 \neq 0$.

Enfin, comme on demandait seulement si f est différentiable, on peut montrer que la dérivée vectorielle en (x_0, x_0) évaluée en v, si elle existe, n'est pas une application linéaire en la variable v. On prend pour cela les vecteurs $v_1 = (\text{signe}(x_0), 0), v_2 = (0, \text{signe}(x_0)), v_3 = v_1 + v_2$, où la fonction signe est définie sur R par

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Si les dérivées vectorielles existent, en particulier il suffit de se restreindre au cas $t > 0$ pour calculer la limite du taux d'accroissement suivant la direction v. On obtient les limites

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+tv_1)-f(a)}{t} = \lim\limits_{t\to 0, t>0} \frac{f(a+tv_1)-f(a)}{t} & = & 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+tv_2)-f(a)}{t} = \lim\limits_{t\to 0, t>0} \frac{f(a+tv_2)-f(a)}{t} & = & 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+tv_3)-f(a)}{t} = \lim\limits_{t\to 0, t>0} \frac{f(a+tv_3)-f(a)}{t} & = & 2|x_0| \end{array}$$

et il est immédiat que l'application $v \mapsto \lim\limits_{t\to 0, t>0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$ n'est pas linéaire.

c) On a directement que : $|f(x,y)| \leq x^2 + y^2$, c'est-à-dire :

$$|f(v)| \leq \|v\|^2 = \text{o}\left(\|v\|\right)$$

donc f est différentiable en $(0,0)$, et sa différentielle en $(0,0)$ est l'application nulle.

d) Comme f est différentiable en $(0,0)$, elle admet des dérivées partielles. Comme la différentielle de f en $(0,0)$ est l'application nulle, les dérivées partielles de f sont toutes nulles.

e) Ici, on utilise le résultat de la question **b)** sous sa première version, c'est-à-dire que la fonction f n'admet pas de dérivées partielles en le point (x_0, x_0) dès lors que $x_0 \neq 0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un voisinage V de $(0,0)$ telle que f admet des dérivées partielles sur V. Par définition de V, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte de centre $(0,0)$ de rayon ε soit incluse dans V. En particulier, le point $(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$ serait dans V, ce qui est impossible car f n'admet pas de dérivées partielles en ce point. D'où la contradiction.

f) La fonction f de l'exercice est différentiable en $(0,0)$, mais n'admet de dérivées partielles dans aucun voisinage de $(0,0)$. La fonction f constitue donc un contre-exemple à la réciproque du théorème évoqué.