# courbe et surfaces

**Exercice 1**. Soit $C$ la courbe de $\mathbb{R}^3$ intersection de la sphère $S$ de centre 0 et de rayon 1 et du cylindre de révolution $Y$ d'axe la droite ($x = 1/2$, $y = 0$) et de rayon $1/2$ ($C$ est la *fenêtre de Viviani*, cf. TD6, exo7).

a) Montrer en utilisant la paramétrisation $f$ de l'exercice 2. que $C$ est la courbe paramétrée définie par $\gamma\colon t \mapsto (\cos^2 t, \cos t \cdot \sin t, \sin t)$.

b) Pour quelles valeurs de $t$ a-t-on $\gamma(t) = A := (1, 0, 0)$ ? Déterminer le(s) vecteur(s) tangent(s) en $A$ à $C$ correspondants, puis dessiner l'allure de $C$ au voisinage de $A$.

c) Montrer que $\gamma$ est birégulière, et déterminer son trièdre de Frenet, sa courbure et sa torsion en tout point.

**Exercice 2**. On définit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ par $f(\theta, \varphi) = \big(\cos\theta \cdot \cos\varphi, \sin\theta \cdot \cos\varphi, \sin\varphi\big)$, et on note $U$ l'ouvert $]0, 2\pi[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de $\mathbb{R}^2$.

a) La restriction $f_U$ de $f$ à $U$ définit-elle une surface paramétrée régulière ? $f$ est-elle injective sur $U$ ?

b) Décrire la surface $f(U)$.

c) Existe-t-il un ouvert $U'$ de $\mathbb{R}^2$ tel que la restriction $f_{U'}$ de $f$ à $U'$ soit une surface paramétrée régulière contenant le point $N = (0, 0, 1)$ ?

d) $f$ est-elle localement injective au voisinage du point $(0, \pi/2)$ ?

e) Donner l'équation du plan tangent à $f(U)$ au point $f(\theta, \pi/6)$. Déterminer tous les plans tangents à $f(U)$ qui passent par le point $(0, 0, 2)$ (c'est "le contour apparent" de la surface $f(U)$ vue du point $(0, 0, 2)$).

**Exercice 3**. Soient $r < R$ des réels strictement positifs. On définit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ par

$$f(\theta, \varphi) = \big(\cos\theta(R + r\cos\varphi), \sin\theta(R + r\cos\varphi), r\sin\varphi\big)\,.$$

a) La surface paramétrée $f$ est-elle régulière ?

b) Donner un ouvert $U$ contenant $(0, 0)$ sur lequel $f$ est injective.

c) En éliminant $\theta$ et $\varphi$ entre $x$, $y$ et $z$, donner une équation cartésienne polynomiale de la surface $\mathbf{T} = f(U)$.

d) Écrire l'équation du plan tangent à $\mathbf{T}$ au point $f(\theta, \varphi)$. À quelle condition l'origine appartient-elle à ce plan ?

**Exercice 4**. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. La surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 = z^2 + a$ est-elle régulière ?