courbes paramétrées

Exercice 1. Soit Γ la courbe plane définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto (3t^2 - 2t^3, 5t^4 - 4t^5)$.
Déterminer les points singuliers de Γ, et donner leur nature.

Exercice 2. Tracer la tangente en 0, si elle existe, et l'allure de la courbe en 0, pour les courbes paramétrées suivantes :

(i) $x(t) = t^3$, $y(t) = t^5 + t^6$;
(ii) $x(t) = t^3 + t^4$, $y(t) = t^6 + t^7$;
(iii) $x(t) = t^2$, $y(t) = t^4 + t^5$.

Exercice 3. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on considère la courbe paramétrée définie par :
$t \mapsto \left(2t + \dfrac{a}{t^2}, t^2 + \dfrac{2b}{t}\right)$ $(t \neq 0)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que la courbe possède un point de rebroussement. Quelle est son espèce ?

Exercice 4. Soit A l'astroïde définie par $x(t) = \dfrac{1}{4}(3\cos t + \cos 3t)$, $y(t) = \dfrac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t)$.
Déterminer les points singuliers de A, leur nature et la tangente à l'astroïde en ces points.

Exercice 5. Étudier et tracer la courbe définie par : $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t \cdot (1 + \cos t)$.
On précisera les points singuliers.

Exercice 6. Étudier et tracer la *néphroïde*, définie par les équations $x(t) = 3\cos t - \cos 3t$, $y(t) = 3\sin t - \sin 3t$. Calculer sa longueur.

Exercice 7. Soit la courbe plane Γ définie sur $\mathbb{R}$ par $x(t) = e^{-t}\cos t, y(t) = e^{-t}\sin t$.

a) Calculer la longueur de Γ entre les points de paramètre 0 et π ; puis 0 et $+\infty$.

b) Donner la paramétrisation de Γ par longueur d'arc.

Exercice 8. Soit $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ de classe C^2. Partant de la formule du cours donnant la courbure $K(s(t))$ en fonction d'un paramétrage quelconque $t \mapsto \gamma(t)$, montrer que si $\gamma(t) = (t, f(t))$, on a

$$K(s(t_0)) = \frac{|f''(t_0)|}{\sqrt{(1 + f'(t_0)^2)^3}} .$$

Dans le cas où $f'(t_0) = 0$, montrer que $K(s(t_0)) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{2|f(t) - f(t_0)|}{(t - t_0)^2}$.

Exercice 9. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Utiliser l'exercice 8. pour calculer en tout point la courbure des courbes suivantes : (a) $y = ax$, (b) $y = ax^2$, (c) $y = e^{ax}$, (d) $x = \cos(ay)$, (e) $xy = a$.

Exercice 10. En quel(s) point(s) de la branche de l'hyperbole $y = \dfrac{1}{x}$ et $x > 0$, la courbure est-elle maximale ?

Exercice 11. Soit γ une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^n$ birégulière en t_0. Montrer que le cercle osculateur C à γ en t_0 est le cercle imitant le plus la courbe γ au voisinage de t_0. Si γ est de plus de classe C^3, montrer qu'en général la courbe traverse le cercle C au point $\gamma(t_0)$.

Exercice 12. Déterminer le rayon de courbure $R(x)$ et le centre de courbure $O(x)$ de la parabole $y = x^2/2$. Donner l'équation du cercle osculateur de plus petit rayon.

Exercice 13. Calculer la longueur d'arc, la courbure et la torsion de la cubique gauche $\gamma(t) = (t, t^2/2, t^3/6)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14. Calculer la courbure et la torsion de la courbe $\gamma(t) = (t^3, (t+1)^3, 3t)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Soit $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la courbe définie par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cosh t)$.

a) Calculer la courbure et la torsion de γ en un point quelconque.

b) Déterminer le trièdre de Frenet en un point de paramètre t_0 quelconque, et donner une équation du plan osculateur à γ en ce point.