équations différentielles

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
   (a) $y' - 2ty = t^3$,
   (b) $y' + y \sin t = \sin(2t)$.
2. Pour chacune d'elles, quelles sont les solutions vérifiant $y(0) = 1$?

Exercice 2

1. Résoudre les équations différentielles suivantes séparément sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$:
   (a) $ty' + y = 0$,
   (b) $ty' - 2y = t^3$,
   (c) $|t|y' + (t-1)y = t^3$,
   (d) $t^2y' - y = t^2 - t + 1$.
2. Pour chacune d'elles, quelles sont
   i) les solutions définies sur $\mathbb{R}$?
   ii) les solutions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $y(1) = 2$?
   iii) les solutions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(1) = 2$?

Exercice 3

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On considère le système $Y' = AY$.

1. Si v est un vecteur propre de A, quelle solution du système peut-on lui associer ?
2. Soient Y_1 et Y_2 deux solutions du système. On suppose qu'il existe des réels t_1 et t_2 tels que $Y_1(t_1) = Y_2(t_2)$. Montrer qu'alors pour tout réel t on a $Y_1(t) = Y_2(t + t_2 - t_1)$. En déduire que les trajectoires des solutions sont égales ou disjointes.
3. Montrer que si une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ est la trajectoire d'une solution alors toutes les courbes obtenues en prenant l'image de $\mathcal{C}$ par une homothétie de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 sont aussi des trajectoires de solutions.

4. Donner la solution générale des systèmes obtenus pour les matrices A suivantes. Tracer l'allure des trajectoires dans le plan (et décrire le comportement quand $t \to \pm\infty$) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Donner la solution générale des systèmes obtenus et la matrice e^{At} pour les matrices A suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

1. Pour les équations suivantes, donner une base de l'espace vectoriel des solutions ; écrire le système $Y' = AY$ et la matrice wronskienne associés, et expliciter e^{At} :
   (a) $y'' - y' - 2y = 0$,
   (b) $9y'' - 6y' + y = 0$,
   (c) $y^{(3)} - 6y'' + 12y' - 8y = 0$,
   (d) $y^{(4)} - 4y^{(3)} - 2y'' + 12y' + 9y = 0$.

2. Résoudre c) resp. d) avec le second membre e^{2t}, resp. $e^{-t} + 1$.

Exercice 5

Donner la solution générale des équations différentielles suivantes (et résoudre le problème de Cauchy correspondant, si demandé) :

1. $y'' - 4y' + 2y = b(t)$, successivement pour $b(t) = 0$, puis t puis e^{2t} ;
2. $y'' - 2y' + 2y = b(t)$, successivement pour $b(t) = 0$ puis $te^t \cos t$;
3. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}(2t + 1)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
4. $y'' + 2y = b(t)$, successivement pour $b(t) = 0$, puis $t + 4$, e^t, $\cos t$, puis $\cos \sqrt{2}t$.
5. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin t}$, sur l'intervalle $]0, \pi[$.

Exercice 6

Pour les matrices A suivantes, donner la solution générale du système $Y' = AY$ (resp. $Y'(t) = AY(t)+B(t)$, si un vecteur $B(t)$ est donné), telle que $Y(0) = Y_0$; faire le lien avec e^{At}, décrire le comportement quand $t \to \pm\infty$:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Donner la solution générale du système $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}$, et tracer l'allure des trajectoires $(x(t), y(t))$ dans le plan (on pourra utiliser deux méthodes différentes, dont le passage à une équation d'ordre 2 à une seule fonction inconnue).

Exercice 8

On considère l'équation $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, où a et b sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une solution non nulle de (E) ne peut s'annuler qu'en des zéros simples et isolés.
2. Soient y_1 et y_2 deux solutions indépendantes de (E). Leur wronskien peut-il s'annuler ? Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 il existe exactement un zéro de y_2.
3. Trouver deux fonctions y_1 et y_2 linéairement indépendantes et définies sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de
$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0.$$
Étudier les zéros de leur wronskien. Ce fait contredit-il le résultat de 2. ?

Exercice 9

Pour les matrices $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, résoudre le problème de

Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} Y'(t) = A(t)Y(t), \\ Y(t_0) = Y_0\,. \end{array} \right.$

Exercice 10

Résoudre le système $Y'(t) = \begin{pmatrix} t & -2 \\ 2 & t \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}+t} \\ 3\,e^{\frac{t^2}{2}+t} \end{pmatrix}$.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto x^3$. On considère le problème de Cauchy (C) suivant :

$$\begin{array}{l} y' = f(y), \\ y(0) = y_o. \end{array}$$

1. Pour quelles valeurs de la condition initiale y_o a-t-on existence et/ou unicité de la solution locale de (C) ?
2. Pour quelles valeurs de la condition initiale y_o a-t-on existence et/ou unicité de la solution maximale de (C) ?
3. Résoudre (C). Les solutions maximales sont-elles définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto 2|x|^{\frac{1}{2}}$. On considère le problème de Cauchy (C) suivant :

$$\begin{array}{l} y' = f(y), \\ y(0) = y_o. \end{array}$$

1. Pour quelles valeurs de la condition initiale y_o a-t-on existence et/ou unicité de la solution locale de (C) ?
2. Résoudre (C).
3. Pour quelles valeurs de la condition initiale y_o a-t-on existence et/ou unicité de la solution maximale de (C) ?