a) fonctions implicites

Exercice 1

Déterminer les points (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $x_0 - y_0 - \sin y_0 = 0$ et au voisinage desquels l'équation $x - y - \sin y = 0$ définit une fonction de classe C^1 $y = \varphi(x)$. Donner alors φ'.

Exercice 2

Dans les exemples ci-dessous on donne une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et un point $m_0 = (x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(m_0) = 0$. Pour chacun, montrer qu'il existe un voisinage U de x_0 dans $\mathbb{R}$, un voisinage V de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, et une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tels que

$$((x, y) \in V \text{ et } f(x, y) = 0) \iff (x \in U \text{ et } \varphi(x) = y)\,.$$

Donner un développement limité à l'ordre 2 de φ en x_0, et l'allure de la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ au voisinage de m_0.

1. $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y) - 1$ et $m_0 = (0, 0)$;
2. $f(x, y) = ye^x + xe^y - 1$ et $m_0 = (0, 1)$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12xy$. On note $\mathcal{C}$ la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation $f(x, y) = 0$.

1. Au voisinage de quels points de $\mathcal{C}$ peut-on définir $\mathcal{C}$ par
   (a) une relation $y = \varphi(x)$, avec φ de classe C^1 ?
   (b) une relation $x = \psi(y)$, avec ψ de classe C^1 ?
   Donner dans chaque cas la propriété vérifiée par la tangente à $\mathcal{C}$ en ces points ; cette propriété caractérise-t-elle les points obtenus ?
2. Remarquer que chaque droite $D_t : y = tx$ coupe $\mathcal{C}$ en deux points dont le point $(0, 0)$. En déduire une paramétrisation de $\mathcal{C} \setminus \{(0, 0)\}$ puis donner l'allure de $\mathcal{C}$.
3. On note $x_1 = 4 \cdot 2^{2/3}$. Déterminer les valeurs de y telles que $(x_1, y) \in \mathcal{C}$. Donner pour chacune l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en (x_1, y).

Exercice 4

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction $(x, y) \mapsto y^3 - 2y^2 + y - x^2 y$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Décrire l'ensemble de niveau $f(x, y) = 0$.
3. Déterminer la nature des points critiques (maximum ou minimum local, ou point col).
4. Pourquoi les ensembles de niveau qui ne passent pas par un point critique sont-ils des courbes régulières ?
5. Déterminer les points où la tangente à une courbe de niveau est parallèle à Ox, resp. à Oy. Esquisser l'allure des ensembles de niveau.
6. Au voisinage de quels points m de $\mathbb{R}^2$ peut-on définir l'ensemble de niveau passant par m par une relation $x = \psi(y)$, avec ψ de classe C^1 ?

Exercice 5

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 + 4$$

et S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $f(x, y, z) = 1$.

1. Déterminer l'ensemble S_1 des points de S au voisinage desquels on peut paramétrer S par (x, y), c'est-à-dire l'ensemble des points (a, b, c) de S pour lesquels il existe un voisinage U de (a, b) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage V de (a, b, c) dans $\mathbb{R}^3$ et une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que
$$((x, y, z) \in V \cap S) \iff ((x, y) \in U \text{ et } \varphi(x, y) = z)\,.$$
2. Pour un point (a, b, c) de S_1, que vaut la différentielle $d\varphi$ au point (a, b) ?
3. On note $m_0 = (3/2, 0, \sqrt{3}/2)$. Vérifier que $m_0 \in S_1$ et donner :
   (a) l'équation du plan tangent T_0 à S en m_0.
   (b) le développement de Taylor à l'ordre 2 de φ en $(3/2, 0)$.
4. Étudier la position de la surface S par rapport au plan T_0, au voisinage de m_0.
5. Soit r une rotation d'axe Oz.
   (a) Montrer que $r(S) \subset S$.
   (b) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une application de classe C^1 telle que $\gamma(I) \subset S$, et soit $t_0 \in I$ pour lequel $\gamma(t_0)$ appartient à S_1. Le vecteur $\gamma'(t_0)$ appartient alors à la direction du plan tangent T à S en $\gamma(t_0)$. Montrer que $r(\gamma'(t_0))$ appartient à la direction du plan tangent T' à S en $r(\gamma(t_0))$.

(c) Qu'en déduit-on sur T' et T ? (voir la feuille *différentiabilité*, exercice 8).

Exercice 6

Soit S le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $S = \{(q,p,x) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + px + q = 0\}$.

1. Soit $M \in S$. Montrer qu'au voisinage de M S est localement le graphe d'une fonction C^∞ de (q,p) si et seulement si le vecteur $(0,0,1)$ n'est pas tangent à S en M.
2. Soit C l'ensemble des points de S en lesquels le vecteur $(0,0,1)$ est tangent à S. Montrer qu'un point (q,p,x) appartient à C si et seulement si x est racine multiple du polynôme $P = X^3 + pX + q$.
3. On note $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la projection $(q,p,x) \mapsto (q,p)$. Déterminer $\pi(C)$.
4. Montrer que si (q,p) n'appartient pas à $\pi(C)$, alors le polynôme $P = X^3 + pX + q$ a ses racines simples et chaque racine réelle de P dépend localement de façon C^∞ des coefficients de P.
5. Que se passe-t-il lorsque (q,p) appartient à $\pi(C)$?

Exercice 7

On considère dans $\mathbb{R}^3$ la courbe $\mathcal{C} = S \cap Y$ où S est la sphère unité, et Y le cylindre vertical dont la base est le cercle de centre $(1/2, 0, 0)$ et de rayon $1/2$.

1. La courbe $\mathcal{C}$ contient-elle un point au voisinage duquel elle ne peut être paramétrée ni par x, ni par y ni par z ?
2. Quels sont les points de $\mathcal{C}$ au voisinage desquels la courbe $\mathcal{C}$ peut être paramétrée par la coordonnée z de façon C^1 ?
3. Donner un vecteur tangent à $\mathcal{C}$ en un tel point.

b) extrema liés

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = x^3 + y^3$. L'application f a-t-elle un maximum sur l'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$? Si oui, en quel(s) point(s) ?

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y,z) = xyz$. L'application f a-t-elle un maximum sur l'ensemble $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} + z^2 \leq 1\}$? Si oui, en quel(s) point(s) ?

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère le cylindre Γ d'équation $x^2+y^2 = 1$, le plan P d'équation $x+y+z = 1$ et la courbe $C = \Gamma \cap P$. Quels sont les points de cote maximale sur C ?

Exercice 11

On construit un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont x,y et z. Son volume est alors $V(x,y,z) = xyz$ et sa surface $S(x,y,z) = 2(xy + xz + yz)$. Peut-on minimiser S sous la contrainte $V = 1$?

Exercice 12

Soient $n \geq 1$ un entier, s un réel > 0. On pose $\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = s\}$.

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n$ admet un maximum sur l'ensemble Γ, et le déterminer.
2. En déduire que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, $(\prod_{i=1}^n x_i)^{1/n} \leq \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.