recherche d'extremum

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien, dont on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire et $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ la norme associée. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme symétrique, c'est-à-dire tel que

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle \text{ pour tous } x, y \in E.$$

1. On définit une application $\varphi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}$. Montrer que φ est différentiable, et calculer sa différentielle $d\varphi(a)$ en un point quelconque $a \in E \setminus \{0\}$.
2. Montrer que $d\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.
3. Montrer que la restriction de l'application φ à la sphère unité S de E admet un maximum en un point x_0 de S.
4. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(\lambda x) = \varphi(x)$.
5. En déduire que l'application $\varphi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ admet un maximum global en x_0.
6. Montrer que x_0 est un vecteur propre de u.

Exercice 2

Chercher les extrema relatifs des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = (2x + 1 - y)^2$,
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right)$,
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x$,
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2y + 1$,
5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{2} + xyz - z + y$,

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui admet un extremum strict en $a \in \mathbb{R}^n$. La forme bilinéaire $d^2 f(a)$ est-elle nécessairement définie positive ou négative ?

Exercice 4

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = 2\cos x \cos y - x^2 + y^2$ admet-elle un extremum local en $(0, 0)$?

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

1. Montrer que $(0, 0)$ est un point critique qui n'est pas un extremum.
2. Montrer que f admet un minimum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
3. Montrer que f n'admet pas d'autre extremum local.
4. Montrer que f admet un minimum global en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \left(y - 3x^2\right)\left(y - x^2\right)$.

1. Montrer que $(0, 0)$ est un point critique pour f et calculer $d^2f(0, 0)$.
2. Montrer que f a un minimum local en $(0, 0)$ sur toute droite qui passe pour $(0, 0)$, i.e., si $g(t) = (at, bt)$ alors $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a un minimum local en 0 pour tous a, b.
3. Montrer que $(0, 0)$ est un point-col.

Exercice 7

1. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $a \in U$. Montrer que si $d^2f(a)$ est définie positive, alors au voisinage de a, le graphe de f est au dessus de celui de son approximation affine en a.
2. On prend $n = 2$ et on considère la fonction $f\colon\ (x, y) \mapsto x - 2\left(x^2 + y^2\right)^2$.

   a) Soit $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Donner l'approximation affine f_1 de f en a et calculer $\mathrm{Hess}_f(a)$.

   b) Comparer les graphes de f et f_1 au voisinage de a.