# accroissements finis - dérivées d'ordre supérieur

## Exercice 1

Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) et $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction. On écrit $\mathbb{R}^n = E_1 \times E_2$, où $E_1 = \mathbb{R}^{n-1}$ et $E_2 = \mathbb{R}$. On considère un point $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de $U$, noté $(a_{\underline{1}}, a_{\underline{2}}) \in E_1 \times E_2$. Si elles existent, on note $d_i f(a)\colon E_i \to \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) les différentielles partielles de $f$.

1. On suppose que les différentielles $d_1 f(a)$ et $d_2 f(a)$ existent. Montrer que les $n$ dérivées partielles de $f$ en $a$ existent et les expliciter.
2. Que peut-on dire si $f$ est différentiable en $a$ ? Exprimer $df(a)$.
3. Montrer que si $f$ est de classe $C^1$ sur $U$, ses dérivées partielles sont continues sur $U$.

## Exercice 2

Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f\colon U \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Soient $a, b$ deux points distincts de $U$.

1. Justifier qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = df(c)(b - a)$.
2. De combien de décimales exactes des nombres $e$, $\sqrt{2}$ et $\pi$ a-t-on besoin pour pouvoir calculer le nombre $\sqrt{2}/(e + \pi^3)$ à $10^{-10}$ près ?

## Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(x, y) = \Big(\frac{1}{2}\sin(x + y), \frac{1}{2}\cos(x - y)\Big)$.

1. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne usuelle $\|.\|_2$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$|||df(x, y)|||_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$
2. Qu'en déduit-on pour $f$ ? Montrer que $f$ admet au plus un point fixe.

## Exercice 4

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

   a) Montrer que $f$ est différentiable sur tout $\mathbb{R}^2$. Calculer $df(0,0)$ et $df(1,1)$.

   b) Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les comparer.

2. Pour la fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y,z) = ye^z + \dfrac{e^y}{x} + xy\sin(z)$, vérifier si les dérivées partielles mixtes d'ordre 2 coïncident. Calculer la différentielle seconde $d^2g(1,2,0)$.

## Exercice 5

On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $C^2$ et que la fonction $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ est nulle sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f$ s'écrit sous la forme

$$f(x,y) = g(x) + h(y),$$

où $g$ et $h$ sont deux fonctions de classe $C^2$.

## Exercice 6

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f(x,t)$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ (ici $c$ est une constante réelle, on suppose $c > 0$). Si $f$ est une telle fonction, on définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g(u,v) = f\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2c}\right)$.

1. Exprimer $dg$ à l'aide des dérivées partielles de $f$.
   En déduire les dérivées partielles de $g$.
2. Calculer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ en termes de dérivées partielles de $f$.
3. En déduire la forme de $g$, puis de $f$.
4. Vérifier que toute fonction $f$ de la forme précédente est bien solution de l'équation.

## Exercice 7

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$ et $(a, b)$ un point de $U$. On suppose qu'il existe des constantes $c_1, ..., c_5$, et une fonction $\epsilon : U \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{(h,k)\to 0} \epsilon(h, k) = 0$, qui vérifient : pour tout $(h, k)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $(a + h, b + k) \in U$,

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + c_1 h + c_2 k + c_3 h^2 + c_4 hk + c_5 k^2 + ||(h, k)||^2 \epsilon(h, k)\,.$$

Montrer qu'une telle écriture est unique.

## Exercice 8

Calculer le polynôme de Taylor d'ordre deux des fonctions suivantes.

1. $f(x, y) = (x + y)^2$ en $(0, 0)$,
2. $f(x, y) = e^{x+y}$ en $(0, 0)$,
3. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ en $(0, 0)$,
4. $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos(y)$ en $(1, 0)$,
5. $f(x, y) = \sin(xy)$ en $(1, \pi)$,
6. $f(x, y) = e^x \sin(y)$ en $(2, \frac{\pi}{4})$,
7. $f(x, y) = \ln(1 + xy)$ en $(2, 3)$,
8. $f(x, y) = x + xy + 2y$ en $(1, 1)$.
9. $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x + y + z + 1}$ en $(0, 0, 0)$,
10. $f(x, y, z) = e^x yz^2$ en $(0, 1, 1)$.

## Exercice 9

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^r$, où $r \geq 2$ et $I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient 0.

1. Montrer que pour tout $x \in I$ $\varphi(x) = \varphi(0) + \displaystyle\int_0^1 \varphi'(tx)x \, dt\,.$
2. Montrer (par récurrence) que pour tout $x \in I$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^1 \frac{(1 - t)^{r-1}}{(r - 1)!} \varphi^{(r)}(tx) x^r \, dt\,.$$

## Exercice 10

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$. Soit $a \in U$, $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, si $||h|| < \delta$ alors $a + h \in U$. Étant donné $h$ avec $\|h\| < \delta$, on considère la fonction $\varphi : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(a + th)$.

1. Montrer que $\varphi$ est bien définie au moins sur un intervalle ouvert $J$ qui contient $[-1, 1]$ (dans la suite on suppose $J$ choisi ainsi).
2. Montrer que pour tout $t \in J$, $\varphi'(t) = df(a + th)(h)$.
3. Montrer que pour tout $t \in J$, $\varphi''(t) = d^2 f(a + th)(h)(h)$.
4. En déduire les formules de Taylor avec reste intégral suivantes :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \int_0^1 (1-t) d^2 f(a+th)(h,h) dt$$

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \frac{1}{2} d^2 f(a)(h,h) + \int_0^1 (1-t)(d^2 f(a+th) - d^2 f(a))(h,h) dt\,.$$

5. Montrer que le reste intégral de la seconde formule est un $o(\|h\|^2)$.

## Exercice 11

Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ définie sur $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On appelle *Laplacien de $f$* la fonction $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, définie sur $U$. On considère $g : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par $g(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, et on pose $F = f \circ g$.

1. Calculer $\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en fonction des dérivées partielles de $F$.
2. Application : trouver toutes les fonctions $\phi$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que la fonction $f(x,y) = \phi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ vérifie $\Delta f(x,y) = 0$ en tout point $(x,y)$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.