différentiabilité

Exercice 1

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^n$. On rappelle que la limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t},$$

quand elle existe, est la **dérivée directionnelle** de f au point a, dans la direction v.

1. Notons $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Lorsqu'elle existe, que vaut la dérivée directionnelle de f au point a, dans la direction e_i ?
2. Si f est différentiable en a, montrer qu'elle admet une dérivée directionnelle en a dans toute direction v, dérivée qui dépend linéairement de v.
3. a) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel et de la norme associée. On suppose que f est différentiable en a. Montrer que si $v \in \mathbb{R}^n$ est de norme 1, on a $df(a)(v) \leq \|\nabla f(a)\|$, avec égalité si et seulement si v pointe dans la direction du gradient (en d'autres termes, le gradient pointe dans la direction de plus grande pente).

   b) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$. Calculer $\nabla f(x,y)$ en un point quelconque. Pour quels (x,y) la direction en (x,y) de pente la plus négative pointe-t-elle vers l'origine ?
4. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $\gamma : I \to U$ différentiable, telle que $f(\gamma(t))$ est constante. Montrer qu'alors pour tout t, $\gamma'(t)$ est orthogonal au gradient $\nabla f(\gamma(t))$ (en d'autres termes, le gradient est orthogonal aux ensembles de niveau de f).

Exercice 2

Pour les applications suivantes et pour tout point m de l'espace de départ, calculer la matrice jacobienne de f en m et expliciter $df(m)$. Calculer ensuite la dérivée directionnelle de f en 0, dans la direction v.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = (x+y)e^{-y^2}$ et $v = (3,1)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y,z) = (x+y+z, x^2+y^2)$ et $v = (1,1,1)$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f(t) = (t\sin t,\, t\cos t,\, t^2)$ et $v = 2$.

Exercice 3

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ données respectivement par $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$ et $g(x,y) = (x+y, x-y)$. Pour tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$, déterminer de deux manières différentes la différentielle de $f \circ g$ en un point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ et donner sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0,0)$.
3. L'application f est-elle différentiable en $(0,0)$?
4. L'application f admet-elle des dérivées partielles continues en $(0,0)$?

Exercice 5

a) Représenter le graphe des fonctions $f_1(x,y) = x^2$, $f_2(x,y) = y^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, puis celui de $f(x,y) = \min(x^2, y^2)$.

b) Montrer que la fonction f n'est pas différentiable en (x_0, x_0) si $x_0 \neq 0$.

c) Montrer que la fonction f est différentiable en $(0,0)$.

d) Montrer que la fonction f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

e) Montrer que la fonction f n'admet de dérivées partielles dans aucun voisinage de $(0,0)$.

f) Montrer que la réciproque du théorème : *"Si f admet dans un voisinage de (x_0, y_0) des dérivées partielles et que ces dérivées partielles sont continues en (x_0, y_0), alors f est différentiable en (x_0, y_0)"* est fausse.

Exercice 6

Donner le domaine de différentiabilité et le cas échéant la différentielle des applications suivantes :

1. f, g et h applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définies par
   $f(x) = \|x\|^2$, $g(x) = \|x\|$ et $h(x) =< u(x), x >$, où $< \, , \, >$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, $|| \; ||$ désigne la norme euclidienne associée, et u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

2. $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ et $g : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définies respectivement par $f(A) = A^2$ et $g(A) = A^3$.
3. $f : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A, B) = AB$.
4. $g : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $g(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$.

Exercice 7

On considère la fonction $f(x, y) = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{2}$ et on note $S \subset \mathbb{R}^3$ le graphe de f.

1. On note C_0 l'intersection de S avec le plan d'équation $z = 4$. Quelle est sa nature ? Quel est le lien avec la ligne de niveau $f = 4$?
2. Vérifier que C_0 contient le point $A = (0, 4, 4)$.
3. Tracer la courbe C_0.
4. Montrer que C_0 est la réunion de deux courbes $C_{0,1}$ et $C_{0,2}$. On notera $C_{0,1}$ celle qui contient A.
5. Donner une paramétrisation $c_0 : I \to C_{0,1}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et c_0 une application dérivable sur I.
6. Vérifier que pour tout point (x, y) de la ligne de niveau $f = 4$, tout vecteur tangent v à cette ligne de niveau au point (x, y) est orthogonal au gradient $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$.
7. Soient C_1 la courbe obtenue en coupant S par le plan d'équation $x = 0$ et C_2 celle obtenue en coupant S par le plan d'équation $y = 4$. Donner une paramétrisation de C_1 et une paramétrisation de C_2.
8. Pour $i = 0, 1, 2$, donner un vecteur non nul v_i tangent en A à la courbe C_i.
9. Vérifier que les vecteurs v_0, v_1 et v_2 sont coplanaires.
10. Soit C_3 la courbe obtenue en coupant S par le plan d'équation $z = x + 4$. Montrer que C_3 est la réunion de deux courbes $C_{3,1}$ et $C_{3,2}$. On notera $C_{3,1}$ celle qui contient A.
11. Donner une paramétrisation c_3 de la courbe $C_{3,1}$ et en déduire un vecteur tangent v_3 à la courbe C_3 en A.
12. Vérifier que v_3 appartient au plan vectoriel engendré par v_1 et v_2.

Exercice 8

On appelle **surface** S de $\mathbb{R}^3$ l'ensemble des points (x, y, z) tels que $g(x, y, z) = 0$, où $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est donnée, de classe C^1. On dit que S est la surface d'équation $g = 0$. Soit alors $m = (x, y, z) \in S$. On dit que le **vecteur** $v \in \mathbb{R}^3$ est **tangent à** S **en** m lorsqu'il existe

un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, un réel $t_0 \in I$ et une courbe $c : I \to S$ de classe C^1 tels que $c(t_0) = m$ et $c'(t_0) = v$.
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $S \subset \mathbb{R}^3$ son graphe, c'est-à-dire la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $g = 0$ où pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on pose $g(x, y, z) = z - f(x, y)$.

1. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} dg(m)$?
2. Montrer que l'ensemble des vecteurs tangents à S en m est $\operatorname{Ker} dg(m)$.

   Nous dirons que **l'espace tangent à S en m** est le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ qui contient m et dont la direction est $\operatorname{Ker} dg(m)$. On le note $T_mS = T_mf$.
3. Écrire l'équation de T_mS à l'aide de la fonction f.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2y - 3xy + xy^2$.

1. Montrer que le point $(1, -1, 3)$ appartient au graphe de f. Donner une équation du plan tangent au graphe de f en ce point.
2. Calculer le gradient de f en $(1, -1)$. Donner une équation de la tangente à la courbe de niveau 3 au point $(1, -1)$.
3. Écrire une équation du plan tangent au graphe de f en un point quelconque $(a, b, f(a, b))$. Pour quels points (a, b) ce plan contient-il l'origine ?

Exercice 10

Soit $h : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une application dérivable et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = h(x^2 + y^2)$. On note S le graphe de f.

1. Soit r une rotation d'axe Oz. Montrer que $r(S) = S$.
2. Montrer que si v est un vecteur tangent à S en un point m de S alors $r(v)$ est un vecteur tangent à S en $r(m)$.
3. On considère $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$, et S son graphe. Montrer que S contient les points $m_1 = (\sqrt{2}, 0, \dfrac{1}{2}\ln 2)$ et $m_2 = (1, 1, \dfrac{1}{2}\ln 2)$. Donner les équations de T_1 et T_2 les plans tangents à S en m_1 et m_2. Vérifier que $r(T_1) = T_2$, où r est la rotation d'axe Oz qui envoie m_1 sur m_2.