révisions

Exercice 1

Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x,y)=\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right),\quad g(x,y)=\sqrt{1-(x-y)^2},$$
$$h(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}},\qquad k(x,y)=\ln\left(\frac{y}{x^2+y^2-1}\right).$$

Exercice 2

Tracer quelques courbes de niveau pour les fonctions suivantes :

$$f(x,y)=x^2-9y^2,\quad g(x,y)=x^2+9y^2,\quad h(x,y)=x^2+x+y^2.$$

Exercice 3

On considère la fonction réelle $f(x,y)=4y^2-2y+4x^2+x$.

1. Calculer $f(-1,1)$.
2. On note C la courbe de niveau $f=5$. Quelle est sa nature ?
3. Tracer la courbe C.
4. Donner une paramétrisation $c : I \to C$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et c une application dérivable sur I.
5. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
6. Montrer que pour tout $t\in I$, tout vecteur tangent $v(t)$ à la courbe C au point $(x(t),y(t))$ est orthogonal au gradient $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)),\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\right)$.
7. Déterminer l'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y)\leq 5$.

Exercice 4

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y)=1-\dfrac{x^2}{4}$.

1. Dessiner la représentation graphique S de f.
2. Quelles sont les lignes de niveau de f ?

3. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tout vecteur tangent v en (x,y) à la ligne de niveau de f qui contient (x,y) est orthogonal au gradient $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$.

Exercice 5

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}$.
   (a) Quel est le domaine de définition de f ?
   (b) Quelles sont les courbes de niveau de f ?
2. Soient plus généralement $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable, et $h : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application $(x,y) \mapsto h(x,y) = g(\dfrac{y}{x})$.
   (a) Montrer que pour tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe Oy on a
   $$x\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$
   (b) Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 6

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en (0,0) ?

$$f_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\,, \qquad f_2(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}\,, \qquad f_3(x,y) = \frac{1+x+y}{x^2+y^2}\,,$$
$$f_4(x,y) = \frac{x^5y^3}{x^6+y^4}\,, \qquad f_5(x,y) = \frac{\sin(x^4)+\sin(y^4)}{\sqrt{x^4+y^4}}\,, \qquad f_6(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}\,.$$

Exercice 7

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$f(0,0) = 0$,
si $(x,y) \in \mathcal{P} \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = 1$,
si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P}$, $f(x,y) = 0$.

1. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^2$, montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $t \mapsto f(tv)$ est continue en 0.