Corrigé CC 2

Exercice 1 :

1. (a) On a $y'(t) = -ty(t) + t^2 \mathrm{e}^t$, c'est-à-dire $y(t) = f(t, y(t))$ où f est définie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$f(t, y) = -ty + t^2 \mathrm{e}^t.$$

   (b) La fonction f précédente est de continue par rapport à t, et de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à y (en particulier, elle est localement lipschitzienne par rapport à y). On peut donc appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz, et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution de l'équation (1) qui vérifie $y(0) = y_0$.

2. (a) Pour trouver les solutions de l'équation, on commence par trouver les solutions de l'équation homogène, c'est-à-dire de l'équation :
$$y'(t) = -ty(t).$$
L'espace des solutions de l'équation homogène est alors directement :
$$\{y(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right),\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
Pour trouver les solutions de l'équation complète, on peut procéder par méthode de variation de la constante ou chercher une solution particulière de la forme $t \mapsto (at + b)\mathrm{e}^t$:
   - en réinjectant la forme suggérée, on voit que $a = 1$ et $b = -1$, conviennent, c'est-à-dire que la fonction $t \mapsto (t - 1)\mathrm{e}^t$ est solution particulière ;
   - avec la méthode de variation de la constante, en cherchant une solution particulière sous la forme $\lambda(t) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$, on voit que λ est une primitive de $t \mapsto t^2 \exp\left(\frac{t^2}{2} + t\right)$, et il est facile de voir que $\lambda(t) = (t-1) \mapsto t^2 \exp\left(\frac{t^2}{2} + t\right)$ convient, ce qui nous donne la même solution particulière que ci-dessus.

   Finalement, l'ensemble des solutions est donné par :
$$\{y(t) = (t - 1)\exp(t) + \lambda \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right),\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

   (b) Il suffit de voit que chaque valeur de y_0 correspond à une et une seule valeur pour λ (suivant la notation ci-dessus). C'est immédiat, puisque l'on a : $y_0 = y(0) = -1 + \lambda$, c'est-à-dire $\lambda = y_0 + 1$ (qui assure l'existence et l'unicité).

Exercice 2 :

1. On a $f(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{e}^{x^2-y^2}$. Les dérivées partielles de f sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\mathrm{e}^{x^2-y^2}(1+x^2+y^2) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\mathrm{e}^{x^2-y^2}(1-x^2-y^2)$$

donc les points critique sont : $(0,0),\ (0,1),\ (0,-1)$.

en $(0,0)$: on a $f(0,0)=0$, et f est clairement positive sur tout $\mathbb{R}^2$. Donc $(0,0)$ est un minimum global.

en $(0,\pm1)$: par parité de f par rapport à y, il suffit d'étudier un seul des deux points (les deux ont même nature). On calcule pour cela la matrice Hessienne de f en $(0,1)$. Mais pour alléger les calculs on préfère passer par un calcul du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $(0,1)$, qu'on écrit comme le développement limité de $(x,y)\mapsto f(x,1+y)$ au voisinage de $(0,0)$. On a :

- $\exp(x^2-(1+y)^2) = \exp(-1+X)$, avec $X=-2y-y^2+x^2$, et donc : $\exp(x^2-(1+y)^2) = \exp(-1) - 2\exp(-1)y + \exp(-1)x^2 + \exp(-1)y^2$.
- $(x^2+(1+y)^2) = 1+2y+x^2+y^2$

et donc :

$$f(x,1+y) = \exp(-1)\cdot(1+2x^2-2y^2).$$

La matrice Hessienne de f en $(0,1)$ est donc la matrice :

$$\begin{pmatrix} 4\exp(-1) & 0 \\ 0 & -4\exp(-1) \end{pmatrix}$$

qui a une valeur propre positive et une négative : on a donc un point selle en $(0,\pm1)$.

2. On a $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz$. Les dérivées partielles de f sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+y+z,\ \frac{\partial f}{\partial y} = x+2y+z,\ \text{et } \frac{\partial f}{\partial z} = x+y+2z$$

donc le seul point critique est $(0,0,0)$.

On a $f(0,0,0)=0$, donc pour étudier le point critique, il suffit d'étudier le signe de f. Or, on a :

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R},\ f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz = \frac{(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2}{2}$$

donc f est toujours positive, et le point $(0,0,0)$ est un minimum global de f. On peut même voir que c'est un minimum strict, puisque l'on a : $f(x,y,z)=0 \Rightarrow x+y=x+z=y+z=0 \Rightarrow x=y=z=0$.

Exercice 3 :

1. On utilise le théorème des fonctions implicites. On a une équation de la forme $f(x,y,z) = 0$, avec $f(x,y,z) = x^2 - yz$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (comme il s'agit d'une fonction polynomiale) donc il suffit de vérifier que $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \neq 0$ pour avoir un paramétrage local de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) de la forme $z = \phi(x,y)$. Comme $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -y$, alors dès lors que $y \neq 0$ on aura le paramétrage voulu.
   Lorsque $y = 0$, alors il n'y aura pas de paramétrage, puisque l'on aura alors $(x,0,z) \in S \Leftrightarrow x = 0$, et donc tous les points de la forme $(0,0,z)$ sont dans S, et z n'est pas parémtré par (x,y).
2. On se place au voisinage de $m = (1,1,1)$.
   (a) En posant $(x,y,z) = (1,1,1)$, on a :
      - $x^2 - yz = 0$, donc $m \in S$;
      - $y \neq 0$, donc $m \in S'$.

   (b) Les dérivées partielles de ϕ sont données par le théorème des fonctions implicites de la manière suivante :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(1,1), \frac{\partial \phi}{\partial y}(1,1)\right) = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(m), \frac{\partial f}{\partial y}(m)\right)}{\frac{\partial f}{\partial z}(m)} = -\frac{(2x,-z)}{-y} = (2,-1).$$

   (c) Le plan tangent à S en m est le plan passant par m, engendré par les vecteurs $(\frac{\partial \phi}{\partial x}(m), 0, 1)$ et $(0, \frac{\partial f}{\partial y}(m), 1)$, c'est-à-dire le plan d'équation : $(z-1) = 2 \cdot (x-1) - (y-1)$, ou plus simplement : $2x - y - z = 0$.

   (d) Pour le développement limité à l'ordre 2 de ϕ, on part du principe que ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc elle possède un tel développement limité. Écrivons le sous la fore : $\phi(1+x,1+y) = 1 + 2x - y + ax^2 + bxy + cy^2 + \mathrm{o}(\|(x,y)\|^2)$, pour $a,b,c \in \mathbb{R}$ que l'on cherche à déterminer. En réinjectant $z = \phi(1+x,1+y)$ dans l'équation $f(1+x,1+y,z) = 0$, on obtient :

$$(a-1) \cdot x^2 + (b+2) \cdot xy + (c-1) \cdot y^2 + \mathrm{o}(\|(x,y)\|^2) = 0$$

   et finalement :

$$\phi(1+x,1+y) = 1 + 2x - y + x^2 - 2xy + y^2 + \mathrm{o}(\|(x,y)\|^2).$$

   (e) Le développement précédent peut se réécrire :

$$\phi(1+x,1+y) = 1 + 2x - y + (x-y)^2 + \mathrm{o}(\|(x,y)\|^2).$$

   Ainsi, la surface est au dessus de son plan tangent au voisinage de m, comme la quantité $(x-y)^2$ est positive.

Exercice 4 : On considère l'application :

$$\phi(x,y) = \left(\sin\left(\frac{y}{2}\right) - x, \sin\left(\frac{x}{2}\right) - y\right).$$

1. (a) Comme ϕ est construite à l'aide des fonctions sin et de fonctions polynomiales (toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$), alors ϕ est elle même de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour montrer qu'il s'agit d'un difféomorphisme local de classe $\mathcal{C}^\infty$, suivant le théorème d'inversion locale, il suffit de vérifier que la différentielle de ϕ est inversible en tout point de $\mathbb{R}^2$. Or, pour $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\det(\mathrm{Jac}_\phi(\mathrm{x},\mathrm{y})) = \begin{vmatrix} -1 & \cos(y/2)/2 \\ \cos(x/2)/2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{\cos(x/2)\cos(y/2)}{4} \geq 3/4 \neq 0$$

donc ϕ est bien un difféomorphisme local de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.

(b) La fonction $u \mapsto \sin(u/2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{C}^1$, et on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis sur tout segment $[u_1, u_2]$ (avec $u_1 < u_2$), donc il existe $u \in]u_1, u_2[$ tel que :

$$\sin\left(\frac{u_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{u_1}{2}\right) = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\left(\frac{u}{2}\right)$$

puisque la dérivée de $u \mapsto \sin(u/2)$ est $u \mapsto (1/2)\cos(u/2)$.
Si l'on se donne $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ qui ont même image par ϕ, alors, en appliquant l'égalité précédente, il existe x entre x_1 et x_2, et y entre y_1 et y_2, tels que :
- $x_1 - x_2 = \sin(y_1/2) - \sin(y_2/2) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)\cos(y/2)$;
- $y_1 - y_2 = \sin(x_1/2) - \sin(x_2/2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)\cos(x/2)$.

Et donc $x_1 - x_2 = \frac{1}{4}(x_1 - x_2)\cos(y/2)\cos(x/2)$, donc $x_1 = x_2$, et de même $y_1 = y_2$. Finalement, on déduit que ϕ est injective.

(c) Comme ϕ est un difféomorphisme local en tout point, et est globalement injective, le théorème d'inversion globale nous dit que c'est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

2. (a) Étant donné un point v de l'image de ϕ, dont on note u l'antécédent, en utilisant le théorème d'inversion locale au voisinage de u on déduit l'existence d'un ouvert V contenant v inclus dans l'image de ϕ. Ainsi, l'image de ϕ est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(b) On suppose que la suite $\phi(x_n, y_n)$ est bornée. En particulier, chacune de ces composantes est bornée (comprise en $-A$ et A pour un certain $A > 0$). Suivant l'écriture de ϕ, on a pour tout n : $x_n, y_n \in [-A-1; A+1]$ (comme les valeurs de $\sin(x_n/2)$ et $\sin(y_n/2)$ sont toujours en -1 et 1). Les suites (x_n) et (y_n) sont donc bornées.

(c) Pour montrer que $\phi(\mathbb{R}^2)$ est fermé, il suffit de s'intéresser à son adhérence. Suivant la définition séquentielle de l'adhérence, il suffit de voir que toute limite de suites d'éléments de $\phi(\mathbb{R}^2)$ est dans $\phi(\mathbb{R}^2)$. Si l'on se donne une telle suite, dont on note l la limite, alors elle est bornée (comme une suite convergente est bornée), donc la suite de ses antécédents aussi. Comme on est dans $\mathbb{R}^2$, on peut extraire une sous-suite convergente de la suite des antécédents. Si l'on note L la limite de la suite extraite des antécédents, alors nécessairement $\phi(L) = l$ (par continuité de ϕ). Donc l est l'image d'un élément de $\mathbb{R}^2$, et $\phi(\mathbb{R}^2)$ est bien fermé.

(d) Comme $\phi(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert fermé non vide de $\mathbb{R}^2$, alors $\phi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

3. D'après le théorème d'inversion locale, si l'on pose $(u, v) = \phi(x, y)$, on a :

$$\mathrm{d}(\phi^{-1})(u, v) = (\mathrm{d}\phi(x, y))^{-1}.$$

Suivant l'écriture précédent de $\mathrm{d}\phi$, on déduit que :

$$\mathrm{d}(\phi^{-1})(u, v) = \frac{4}{4 - \cos(x/2)\cos(y/2)} \begin{pmatrix} -1 & \cos(y/2)/2 \\ \cos(x/2)/2 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est bien bornée. En particulier, les valeurs propres sont dans $[-4/3; -4/5]$, et ϕ^{-1} est lipschitzienne de rapport $5/4$.