CC 2

Exercice 1. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) + ty(t) = t^2 e^t. \tag{1}$$

1) a) Mettre cette équation sous la forme $y'(t) = f(t, y(t))$ en précisant f et son ensemble de définition.

   b) En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, montrer que cette équation admet une unique solution satisfaisant $y(0) = y_0$ où $y_0 \in \mathbb{R}$.

2) a) Donner toutes les solutions de l'équation (1). (On pourra commencer par résoudre l'équation homogène puis chercher une solution particulière de la forme $t \to (at+b)e^t$ et déterminer les constantes a et b.)

   b) En déduire qu'il existe une unique solution satisfaisant $y(0) = y_0$ où $y_0 \in \mathbb{R}$. (On retrouvera ainsi le résultat de la question 1)b) par une méthode différente.)

Exercice 2.

1) Déterminer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)e^{x^2-y^2}$ et préciser leur nature.

2) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz$. Déterminer les extrema locaux de f. La fonction f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^3$? (On pourra par exemple montrer que $f(x,y,z)$ est toujours positive sur $\mathbb{R}^3$.)

Exercice 3. On considère la surface S de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 - yz = 0$.

1) Déterminer les points a de cette surface pour lesquels il existe un paramétrage local de classe C^1 de la forme $z = \phi(x,y)$. On notera S' l'ensemble de ces points.

2) Soit $m = (1,1,1)$.

   a) Vérifier que m est dans S'. Dans la suite, on supposera que ϕ est définie au voisinage du point $(1,1)$ et que $\phi(1,1) = 1$.

   b) Calculer $\frac{\partial \phi}{\partial x}(m)$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y}(m)$.

   c) Donner une équation du plan tangent à S en m.

   d) Donner le développement limité de ϕ à l'ordre 2 en $(1,1)$.

   e) En déduire la position de la surface par rapport au plan tangent au point m.

Exercice 4. On considère l'application

$$\varphi(x,y) = \left(\sin\left(\frac{y}{2}\right) - x, \sin\left(\frac{x}{2}\right) - y\right)$$

définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

1) a) Montrer que φ est un difféomorphisme local de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.

   b) Montrer que, pour tout u_1 et u_2 avec $u_1 < u_2$, il existe $u \in]u_1, u_2[$ tel que

$$\sin\left(\frac{u_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{u_1}{2}\right) = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\left(\frac{u}{2}\right).$$

   En déduire que φ est injective.

   c) En déduire que φ est un difféomorphisme global sur son image.

2) Nous allons maintenant montrer que l'image de φ est $\mathbb{R}^2$.

   a) En utilisant le fait que φ est un difféomorphisme local, montrer que l'image de φ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

   b) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que la suite $(\varphi(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer qu'alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

   c) En déduire que $\varphi\left(\mathbb{R}^2\right)$ est fermé.

   d) En déduire que l'image de φ est $\mathbb{R}^2$. (On pourra admettre que le seul sous ensemble non vide fermé et ouvert de $\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}^2$.)

3) Soit $(u, v) = \varphi(x, y)$. Calculer $(d\varphi)^{-1}(u, v)$ en fonction de $(d\varphi)(x, y)$. Montrer que $(d\varphi)^{-1}$ est bornée, puis que φ^{-1} est lipschitzienne.