Corrigé CC 1

Exercice I :

1. $f_1(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}$: On utilise l'inégalité classique :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}.$$

En particulier, on a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |f_1(x,y)| = \left|\frac{x^2y^2}{x^4+y^2}\right| = |y| \cdot \left|\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right| \leq \left|\frac{y}{2}\right|$$

Et par théorème d'encadrement, on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 0$$

et f_1 est bien prolongeable par continuité en $(0,0)$ (avec $f_1(0,0) = 0$).

2. $f_2(x,y) = \dfrac{1+xy}{x^2+|y|}$:
On a les limites suivantes :

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} & 1+xy & = 1 \neq 0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} & x^2+|y| & = 0^+ \end{cases}.$$

Et finalement :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = +\infty.$$

Donc f_2 n'admet pas de prolongement par continuité en $(0,0)$.

3. $f_3(x,y) = \dfrac{\sin(x^2)\cdot y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}$: On a l'inégalité :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ |y^2| = \sqrt{y^4} \leq \sqrt{x^2+y^4}$$

et donc :

$$|f_3(x,y)| \leq |\sin(x^2)\cdot y| \leq |y|$$

Par théorème d'encadrement, on déduit finalement que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y) = 0$$

donc f_3 est prolongeable par continuité en $(0,0)$, avec $f_3(0,0) = 0$.

4. $f_4(x,y) = \dfrac{y^4}{x}$: Il suffit de faire les limites partielles. On a :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to 0} f_4(x,y) = \infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{y\to 0} f_4(x,y) = 0$$

donc f_4 n'a pas de limite en $(0,0)$, et n'est donc pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Exercice II :

Les deux fonctions à étudier sont évidemment deux fois différentiables en $(0,0)$ (elles sont mêmes de classe $\mathcal{C}^\infty$) puisque :

- la fonction f_1 est une fraction rationnelle en x et y, donc le dénominateur ne s'annule pas en $(0,0)$;
- la fonction f_2 est une fonction polynomiale en x et y.

En particulier, la différentielle d'ordre 1 et la différentielle d'ordre 2 de f se déduisent directement du développement limité de f au voisinage de $(0,0)$ à l'ordre 2 par :

$$f(x,y) = f(0,0) + \mathrm{d}f_{(0,0)}(x,y) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f_{(0,0)}((x,y),(x,y)) + \mathrm{o}(\|(x,y)\|^2).$$

1. $f_1(x,y) = \dfrac{x}{1+xy}$: On utilise le fait que, au voisinage de $(0,0)$, on a l'approximation :

$$x^k y^l = \mathrm{o}(\|(x,y)\|^{k+l-1}).$$

Dans notre cas présent, on a :

$$f_1(x,y) = \frac{x}{1+xy} = x\cdot(1 - xy + \mathrm{o}(xy)) = x - x^2y + \mathrm{o}(x^2y) = x + \mathrm{o}(\|(x,y)\|^2).$$

Les différentielles d'ordre 1 et 2 de f_1 en $(0,0)$ sont donc données par :

$$\begin{cases} \mathrm{d}f_{(0,0)}(x,y) = x \\ \mathrm{d}^2 f_{(0,0)} = 0 \text{ (la fonction nulle)} \end{cases}$$

2. $f_2(x,y) = (2x-3)\cdot(y+2)$: Suivant la même approximation que précédemment, il suffit de tronquer une fonction polynomiale à l'ordre 2 pour avoir son développement limité à l'ordre 2. Ici, comme il n'y a pas de terme d'ordre supérieur à 2, la fonction f_2 donne directement le développement limité cherché. Il nous suffit de regrouper les termes en fonction de leurs degrés. On a :

$$f_2(x,y) = (2x-3)\cdot(y+2) = -6 + (4x - 3y) + 2xy + \mathrm{o}(\|(x,y)\|^2)$$

On déduit finalement :

$$\begin{cases} \mathrm{d}f_{(0,0)}(x,y) = 4x - 3y \\ \mathrm{d}^2 f_{(0,0)}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 \end{cases}$$

Notons au passage que, dès lors que l'on sait que les fonctions sont $\mathcal{C}^2$, il y a équivalence entre le calcul du développement limité à l'ordre 2 et le calcul des différentielles d'ordre 1 et 2. En particulier, on aurait pu calculer directement ces différentielles (avec la Jacobienne, qui n'est autre que le gradient ici, et de la Hessienne de f), et retrouver le développement limité grâce à la formule de Taylor–Young.

Problème : Fonctions homogènes.

On considère f une fonction continue sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On suppose qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que f est *positivement homogène de degré* α, c'est-à-dire que :

$$\forall (x,y) \in U,\ \forall t > 0,\ f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y).$$

1. On suppose que f admet un prolongement par continuité en $(0,0)$, avec $\alpha = 0$. Cela veut dire que f possède une limite en $(0,0)$, que l'on note pour simplifier $f(0,0)$. Étant donné $(x,y) \in U$ fixé, pour tout $t > 0$, on a :

$$f(tx, ty) = f(x,y).$$

   En faisant tendre t vers 0, on déduit que :

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = f(0,0)$$

   donc f est nécessairement constante.

   Il est immédiat que toute fonction constante sur U est bien positivement homogène de degré 0, et admet un prolongement par continuité en $(0,0)$.

2. On suppose ici $\alpha > 0$. Comme la fonction f est coninue sur U, alors la fonction $g(\theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta))$ est continue sur $\mathbb{R}$. Comme g est 2π-périodique, alors elle est bornée sur $\mathbb{R}$, et on note M un majorant sur $\mathbb{R}$ de la fonction $|g(\theta)|$.

   On utilise ensuite que f est homogène. Étant donné $(x,y) \in U$, on a :

$$f(x,y) = f\left(\|(x,y)\| \cdot \left(\frac{x}{\|(x,y)\|}, \frac{y}{\|(x,y)\|}\right)\right) = \|(x,y)\|^\alpha f\left(\frac{x}{\|(x,y)\|}, \frac{y}{\|(x,y)\|}\right)$$

   où on désigne par $\|(x,y)\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, l'élément $\left(\frac{x}{\|(x,y)\|}, \frac{y}{\|(x,y)\|}\right)$ peut s'écrire sous la forme $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.

   On déduit finalement que :

$$|f(x,y)| \leq M \cdot \|(x,y)\|^\alpha$$

   et comme $\alpha > 0$, on a finalement :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

   donc f est prolongeable par continuité en $(0,0)$, avec $f(0,0) = 0$.

3. On suppose que $\alpha \in]0,1[$.
   - Il est immédiat que la fonction nulle est homogène de degré α (la fonction nulle étant homogène peu importe le degré). Comme la fonction nulle est évidemment différentiable (il s'agit notamment d'une application linéaire), on a déjà une implication.
   - Supposons f différentiable en $(0,0)$. Il existe une application linéaire $L = \mathrm{d}f_{(0,0)}$ telle que :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = L(x,y) + \mathrm{o}(\|(x,y)\|).$$
   La linéarité de l'application L permet d'écrire, pour tout $t > 0$ et à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé :
   $$t^\alpha f(x,y) = f(tx,ty) = L(tx,ty) + \mathrm{o}(\|(tx,ty)\|) = t \cdot L(x,y) + \mathrm{o}(t)$$
   et en particulier :
   $$f(x,y) = t^{1-\alpha} L(x,y) + \mathrm{o}(t^{1-\alpha})$$
   puis en faisant tendre t vers 0 (comme $\alpha \in]0,1[$, et donc $(1-\alpha) \geq 0$) : $f(x,y) = 0$. Donc f est la fonction nulle, ce qui justifie l'autre implication.
4. On suppose que $\alpha = 1$.
   - Là encore, il est immédiat que toute fonction linéaire est homogène de degré 1. Comme toute fonction linéaire est différentiable (de dérivée elle-même), on a déjà une implication.
   - Supposons f différentiable en $(0,0)$. Suivant les notations de la question précédente, on déduit que, pour tout $t > 0$ et à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé :
   $$tf(x,y) = f(tx,ty) = L(tx,ty) + \mathrm{o}(\|(tx,ty)\|) = t \cdot L(x,y) + \mathrm{o}(t)$$
   et en particulier :
   $$f(x,y) = L(x,y) + \mathrm{o}(1)$$
   puis en faisant tendre t vers 0 : $f(x,y) = L(x,y)$. Donc f est une application linéaire (à sa voir sa différentielle), ce qui justifie l'autre implication.
5. On suppose que $\alpha > 1$. En reprenant le processus de la question 2., on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
   $$f(x,y) = f\left(\|(x,y)\| \cdot \left(\frac{x}{\|(x,y)\|}, \frac{y}{\|(x,y)\|}\right)\right) = \|(x,y)\|^\alpha f\left(\frac{x}{\|(x,y)\|}, \frac{y}{\|(x,y)\|}\right)$$
   On utilise à nouveau que la quantité $f\left(\frac{x}{\|(x,y)\|}, \frac{y}{\|(x,y)\|}\right)$ est bornée. Comme $\alpha > 1$, on déduit finalement que :
   $$f(x,y) = \mathrm{O}\left(\|(x,y)\|^\alpha\right) = \mathrm{o}\left(\|(x,y)\|\right)$$
   Ainsi, f est bien différentiable en $(0,0)$, avec $\mathrm{d}f_{(0,0)} = 0$ (l'application nulle).

6. On se donne $\alpha \geq 0$, et $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On considère la fonction $\phi(t) = g(tx, ty) - t^\alpha g(x, y)$, où $(x, y) \in U$ est fixé. La fonction ϕ ne faisant obtenir que des fonctions différentiable, elle est elle-même différentiable (c'est-à-dire dérivable, comme il s'agit d'une fonction sur $\mathbb{R}$). Sa dérivée est donnée par :

$$\phi'(t) = x\frac{\partial g}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial g}{\partial y}(tx, ty) - \alpha t^{\alpha-1}g(x, y).$$

Il est immédiat que la fonction g est homogène si, et seulement si, la fonction ϕ est identiquement nulle. Comme, indiféremment du choix de (x, y), on a $\phi(1) = 0$, alors g est homogène si, et seulement si, ϕ' est identiquement nulle.
Il suffit donc de montrer que la fonction ϕ' (suivant l'expression précédente) est nulle si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $x\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \alpha g(x, y)$.

   - si $\phi' = 0$: alors en particulier $\phi'(1) = 0 = x\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) - \alpha g(x, y)$. Comme ceci est vrai pour tout (x, y), on a la première implication.
   - si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \alpha g(x, y)$: alors en réinjectant cette égalité dans l'expression précédente de ϕ', on déduit que ϕ vérifie : $t\phi'(t) = \alpha\phi(t)$, c'est-à-dire que $\phi(t)$ est de la forme $c \cdot t^\alpha$ (pour un certain $c \in \mathbb{R}$). Comme $\phi(1) = 0$, on déduit que $\phi(t) = 0$, donc g est bien homogène de degré α.

7. On considère l'équation différentielle :

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = xy.$$

Suivant la question précédente, la fonction $g_2(x, y) = \frac{xy}{2}$ étant homogène de degré 2, il est immédiat que g_2 est solution de notre équation.
Une application g est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, la fonction $g_1 = g - g_2$ vérifie :

$$x\frac{\partial g_1}{\partial x} + y\frac{\partial g_1}{\partial y} = 0$$

c'est-à-dire si, et seulement si, la fonction g_1 est homogène de degré 0.
En conclusion, une fonction g est solution de la première équation différentielle si, et seulement si, elle est de la forme $g = g_1 + g_2$ où :
   - g_1 est une fonction homogène de degré 0 ;
   - $g_2(x, y) = \frac{xy}{2}$.

Et la fonction g_2 peut être remplacée par n'importe quelle solution particulière de l'équation.