Université Grenoble–Alpes **Calcul diff B 2018/2019**

CC 1

Exercice I :

Dire si les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, sont prolongeables par continuité en $(0,0)$:

1. $f_1(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}$;
2. $f_2(x,y) = \dfrac{1+xy}{x^2+|y|}$;
3. $f_3(x,y) = \dfrac{\sin(x^2)\cdot y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}$;
4. $f_4(x,y) = \dfrac{y^4}{x}$.

Exercice II :

Pour chacune des fonctions suivantes, justifier (brièvement) qu'elles sont deux fois différentiables en $(0,0)$, puis caculer leurs développements de Taylor à l'ordre 2 en $(0,0)$, et en déduire leurs différentielles d'ordre 1 et 2 en $(0,0)$:

1. $f_1(x,y) = \dfrac{x}{1+xy}$;
2. $f_2(x,y) = (2x-3)\cdot(y+2)$.

Problème : Fonctions homogènes.

On considère f une fonction continue sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On suppose qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que f est *positivement homogène de degré* α, c'est-à-dire que :

$$\forall (x,y) \in U,\ \forall t > 0,\ f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y).$$

1. On suppose que f admet un prolongement par continuité en $(0,0)$. Que peut-on dire sur f si $\alpha = 0$?
2. Montrer que, si $\alpha > 0$, alors f admet un prolongement par continuité en $(0,0)$, avec $f(0,0) = 0$. On pourra pour cela voir que la fonction $g(\theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta))$ est majorée sur $\mathbb{R}$. On notera dans la suite f ce prolongement continu à $\mathbb{R}^2$.
3. On suppose que $\alpha \in]0,1[$. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ si, et seulement si, f est la fonction nulle.
4. On suppose que $\alpha = 1$. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ si, et seulement si, f est une application linéaire.
5. Montrer que, si $\alpha > 1$, alors f est différentiable en $(0,0)$.

6. On se donne $\alpha \geq 0$, et $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Montrer que g est homogène de degré α si, et seulement si, elle vérifie l'équation différentielle :

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = \alpha g.$$

   On pourra pour cela étudier les variations de la fonction $\phi(t) = g(tx, ty) - t^\alpha g(x, y)$, où $(x, y) \in U$ est fixé.

7. En déduire que les solutions de l'équation différentielle :

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = xy$$

   sont de la forme $g(x, y) = g_1(x, y) + g_2(x, y)$, où g_1 est une fonction homogène de degré 0, et g_2 est une fonction que l'on précisera.