Licence 2, UE 3.2 Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques 2016-2017

TD 4 de suites numériques

Les énoncés sont classés par difficulté via le symbole ★.

▸ **Exercice 1**. ★ Retour sur les suites arithmétiques
On rappelle que les suites arithmétiques sont des suites récurrentes particulières ! Ainsi si pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + r$, deviner l'expression en fonction de n de u_n et prouvez la par récurrence.

▸ **Exercice 2**. ★ Retour sur les suites géométriques
On rappelle que les suites géométriques sont des suites récurrentes particulières ! Ainsi si pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = ru_n$, deviner l'expression en fonction de n de u_n et prouvez la par récurrence.

▸ **Exercice 3**. ★★ Tour de Hanoï bis et suites arithmético géométriques
On reprend le jeu des tours de Hanoï et on interdit à tout disque de sauter le disque intermédiaire. On note u_n le nombre d'étapes pour transporter les n disques sans sauter le disque intermédiaire.

1. **Modélisation :** Expliquer pourquoi pour tout n entier positif, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.
2. Si la suite u_n converge, quelle est la limite l ?
3. Montrer que $(u_n - l)$ est une suite géométrique.
4. En déduire l'expression de u_n pour tout n et discuter quant à la convergence de (u_n).

▸ **Exercice 4**. ★★ Dynamique bactérienne : Le modèle de Verhulst.
On étudie la dynamique de croissance de bactéries dont la population après n heures est notée u_n (u_n s'exprime en centaines de bactéries). On suppose que cette dynamique obéit au modèle suivant :

— Les bactéries se reproduisent avec un taux α donné : ainsi chaque heure, on assiste à une apparition de αu_n bactéries.
— Les ressources nutritives du milieu n'étant pas illimitées, les bactéries ont un taux de mortalité dû à la concurrence avec les bactéries déjà présentes : on retire donc un terme en $(1+\alpha)u_n \times u_n$.

Au final la population de bactéries au temps $n+1$ est donnée pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + \alpha u_n - (1+\alpha)u_n^2$. En notant $\lambda = 1 + \alpha$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \lambda u_n(1 - u_n).$$

Supposons que $\lambda = 2$, on cherche donc à savoir comment va se comporter la population en temps long lorsque $n \to +\infty$.

1. Supposons que (u_n) converge, quelle peut être sa limite ?
2. On se place sur l'intervalle $[0, 1]$. Etudier et tracer précisément la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$. Ajouter sur le dessin, la fonction $x \mapsto x$.
3. Tracer sur ce dessin les itérations successives de (u_n) à partir de $u_0 = 0.1$. Que devinez vous sur le comportement de (u_n) en temps long ?

4. Quel est le signe de $f(x) - x$ sur $[0, 1/2]$ Démontrer que pour $u_0 = 0.1$, (u_n) est croissante.
5. Démontrer par récurrence sur n entier naturel, que pour tout n, $u_n \leq \frac{1}{2}$.
6. En déduire que (u_n) converge.

▸ **Exercice 5.** ★ Suites récurrentes d'ordre 1 et 2
Donner l'expression de (u_n) en fonction de n entier naturel pour les suites récurrentes définies par

1. $u_{n+1} = 6u_n - 2$.
2. $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$.
3. $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$.
4. $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$.

▸ **Exercice 6.** ★★ Passage de témoin pour le S2 : les séries numériques
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On considère la suite dite "des sommes partielles" appelée série (S_N) pour $S_N = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} u_n$. Pour être plus précis S_N est la somme partielle de rang N tandis que $(S_N) = (S_0, S_1, \ldots, S_N, \ldots)$ est ce qu'on appelle une série (suite de sommes partielles).

1. Expliciter S_N (écrire la somme sous la forme $a + b + \ldots + d$).
2. En déduire pour N entier naturel ce que valent $S_{N+1} - S_N$, $S_{N+2} - S_N$, $S_{2N+1} - S_{2N}$, $S_{2N+2} - S_{2N}$.

> ***Définition 1: Convergence d'une série numérique***
>
> On dit que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles (S_N) converge. On note alors sa limite $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
>
> On dit que la série $\sum u_n$ diverge si et seulement si (S_N) diverge.

3. Supposons que $\sum u_n$ converge, à l'aide de l'expression de $S_{N+1} - S_N$ et de la définition précédente, montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. Les séries télescopiques : Calculer en explicitant la somme, pour N un entier naturel, $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_{n+1} - u_n$. Sous quelle condition (S_N) converge-t-elle ?
5. La série géométrique : Calculer en vous servant de la question précédente pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, $(1 - x)\displaystyle\sum_{n=0}^{N} x^n$. En déduire sous quelle condition cette (S_N) définie par $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} x^n$ converge et déterminer le cas échéant l'expression de la limite.