Licence 2, UE 3.2 — Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques — 2016-2017

# TD 2 de suites numériques

Les énoncés sont classés par difficulté via le symbole ★.

▸ **Exercice 1**. ★★ Calcul de limites
Calculer la limite, si elle existe, des suites suivantes : essayez de deviner la limite avant de commencer tout calcul.

$$\textbf{1)}\ u_n = \frac{n^3+4(-1)^n}{-n^2-5\cos(n)} \quad \textbf{2)}\ u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}+n^2} \quad \textbf{3)}\ u_n = \frac{1+2n-n^3+n^2\ln(n)}{n-1}, \quad \textbf{4)}\ u_n = \left(1-\frac{5}{n}\right)^2,$$

$$\textbf{5)}\ u_n = \frac{4^n}{n^3} \quad \textbf{6)}\ u_n = \frac{4^n}{n!} \quad \textbf{7)}\ u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \quad \textbf{8)}\ u_n = \frac{\cos(\arctan(n)\sqrt{n})}{n^3}, \quad \textbf{9)}\ u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

▸ **Exercice 2**. ★ S'entraîner à récurrer avec des séries
Montrez par récurrence sur $n$ les égalités suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \geqslant n+1.$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1+4+9+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = 1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour $x \neq 1$.

▸ **Exercice 3**. ★ Les limites de ces séries
Déterminez si elle existe, en utilisant les expressions de l'exercice précédent, la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ de la suite $(S_n)$ définie par

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2.$
2. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ lorsque $-1 < x < 1$.
3. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ lorsque $x > 1$.
4. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ lorsque $x \leq -1$.

▸ **Exercice 4**. ★ Caractérisation séquentielle de la continuité
Recalculer les limites ci-dessous grâce à la proposition suivante

***Proposition 1***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $l \in I$ et soit $(u_n)$ une suite réelle. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et si $f$ est continue en $l$ alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(l)$.

$$\textbf{1)}\ u_n = \exp\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \textbf{2)}\ u_n = (\cos n)\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \quad \textbf{3)}\ u_n = \ln\left(1+\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

▸ **Exercice 5**. ★★ Théorème des suites adjacentes.
Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles adjacentes telles que $\forall n, u_n \leq v_n$.

1. Rappelez la définition des suites adjacentes.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq v_n \leq \ldots \leq v_1 \leq v_0$.
3. En déduire que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes.
4. Notons $u$ et $v$ leurs limites respectives. Démontrez que $u = v$.

▸ **Exercice 6**. ★ Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n(n!)}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes, c'est-à-dire que l'une est croissante, l'autre décroissante et que leur différence tend vers 0.
2. Qu'en déduire que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ?

▸ **Exercice 7**. ★★ Un livret A qui rapporte
On place un capital $u_0 = 1500$ euros sur un livret A à 4.5% d'intérêt par an. On note $u_n$ le capital obtenu au bout de $n$ années.

1. Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.
2. Devinez l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ puis prouvez là par récurrence.
3. Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans.
4. Au bout de combien d'années le capital initial aura-t'il doublé ?

▸ **Exercice 8**. ★★ Apprenons à comparer des suites
Comparer (dîtes qui est inférieur à qui et expliquez pourquoi) les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ suivantes :

1. $u_n = \sin(n)$, $v_n = 1$ pour $n \geqslant 0$.
2. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, $v_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.
3. $u_n = \dfrac{1}{n^2 - \ln(n)}$, $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour $n \geqslant e$.
4. $u_n = \ln(n)$ et $v_n = 1$ pour $n \geqslant e$.

Pour les suites suivantes, trouver par une suite plus grande **la plus simple possible**

5. $u_n = \dfrac{|\sin(n)|}{n+1}$ pour $n \geqslant 1$.
6. $u_n = \dfrac{|\cos(n^2)|}{n^2 + \ln(n)}$ pour $n \geqslant e$.
7. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geqslant 1$.
8. $u_n = \dfrac{1}{(3 + (-1)^n)^n}$ pour $n \geqslant 0$.

Pour les suites suivantes, trouver par une suite plus petite pour tout $n$ **la plus simple possible**

9. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n} - \ln(n)}$, pour $n \geqslant e$.
10. $u_n = \dfrac{1}{n\cos(n)^2}$, pour $n \geqslant 1$.