Licence 2, UE 3.2 — Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques — 2016-2017

TD 1 de suites numériques

Les énoncés sont classés par difficulté via le symbole ★.

▸ **Exercice 1**. ★ Suites arithmétiques et récurrence.
Un satellite doit être placé en orbite autour de la planète terre afin de diffuser vos émissions préférées. Une fusée amenant ce satellite sur place connait une phase d'accélération jusqu'à la hauteur de 10kms puis se déplace à une vitesse constante de 8kms secondes. On mesure l'évolution de l'altitude de la fusée en fonction du temps à partir du moment où la vitesse devient constante. On note u_n l'altitude en kms après n secondes.

1. Que vaut u_0 ?
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Prouvez par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 10 + 8n$.
4. Quelle est la limite de cette suite ? Que ferait la fusée si on ne la ralentissait pas à l'approche du satellite ?

▸ **Exercice 2**. ★ Suites géométriques et récurrence.
Le poumon humain est un arbre constitué de 10^{23} générations de bronches se séparant tour à tour en plusieurs bronches de taille inférieure. La dernière génération s'achève par des alvéoles pulmonaires assurant la transition de l'oxygène entre le poumon et le sang. Entre deux générations successives, les bronches sont "homothétiques" : la longueur d'une bronche de $n+1$ ième génération est celle de n ième génération pondérée par un facteur $\lambda \in [0,1]$.

1. Notons u_n la longueur d'une bronche de la n ième génération. Relier u_{n+1} à u_n.
2. Démontrez par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda^n u_0$.
3. Quelle est la limite de cette suite ?

▸ **Exercice 3**. ★ Calcul de limites
Calculer la limite, si elle existe, des suites suivantes : essayez de deviner la limite avant de commencer tout calcul.

$$\textbf{1)}\ u_n = \frac{n+4}{n^2-5n+1} \qquad \textbf{2)}\ u_n = \frac{\ln n}{n^2+1} \qquad \textbf{3)}\ u_n = q^n,\ -1 < q < 1 \qquad \textbf{4)}\ u_n = \frac{n^2+2^n}{3^n}$$

$$\textbf{5)}\ u_n = ne^n \qquad \textbf{6)}\ u_n = n^2e^{-n} \qquad \textbf{7)}\ u_n = \frac{n!}{n^n}, \qquad \textbf{8)}\ u_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

▸ **Exercice 4**. ★★ Calcul de limites 2
Calculer la limite, si elle existe, des suites suivantes :

$$\textbf{1)}\ u_n = (\cos n)\sin\frac{(-1)^n}{n} \qquad \textbf{2)}\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

▸ **Exercice 5**. ★★ Le piège par excellence.

Calculer la limite des deux suites

$$\textbf{1)}\ u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \qquad \textbf{2)}\ u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Que conclure de cet exercice ?

▸ **Exercice 6**. ★ Calculer la limite, si elle existe, des suites suivantes en effectuant un développement limité :

$$\textbf{1)}\ u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right), \textbf{2)}\ u_n = \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \textbf{3)}\ u_n = \exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1.$$

▸ **Exercice 7**. ★★ Calculer la limite, si elle existe, des suites suivantes en effectuant un développement limité :

$$\textbf{1)}\ u_n = n^3(2^{1/n^2}-1) \quad \textbf{2)}\ u_n = -n^2\ln\left(1+\frac{\ln 2}{n}\right) \quad \textbf{3)}\ u_n = n^3(2^{1/n^2}-1)-n^2\ln\left(1+\frac{\ln 2}{n}\right)$$

▸ **Exercice 8**. ★★ Histoire de quantificateurs

1. Rappelez la définition mathématique de (u_n) converge vers $u \in \mathbb{R}$.
2. En utilisant cette définition, démontrez que si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors (λu_n) converge vers $\lambda u \in \mathbb{R}$ pour λ un réel.
3. En utilisant cette définition, démontrez que si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ et (v_n) converge vers $v \in \mathbb{R}$, alors $(u_n + v_n)$ converge vers $u + v \in \mathbb{R}$.

▸ **Exercice 9**. ★ Jouons à sommer les entiers : le début des séries

1. Montrez en superposant $1+2+\ldots+n$ et $n+(n-1)+\ldots+2+1$ que
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$
2. On considère une pyramide de carrés d'aires 1, dont la base a n carrés comme sur le dessin. Calculez de deux façons l'aire de cette pyramide. Retrouver la formule (1)
3. Rappeler le principe de récurrence puis montrer par récurrence la formule (1).

▸ **Exercice 10**. Vrai ou Faux. Dire pour chacune des propriétés suivantes si elle est vraie ou fausse. La prouver dans le premier cas, donner un contre-exemple dans le second.

1. ★ Toute suite croissante et majorée est bornée.
2. ★ Toute suite croissante et minorée est bornée.
3. ★ Toute suite majorée par une suite tendant vers 0 tend vers 0.
4. ★ Toute suite positive majorée par une suite tendant vers 0 tend vers 0.
5. ★ Si la suite (u_n) converge alors $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
6. ★★ Si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors la suite (u_n) converge.

7. ★★ Une suite de réels positifs qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

▸ **Exercice 11**. ★★ Donnez la limite des suites suivantes, commencez par écrire la somme complètement développée.

$$\textbf{1)}\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \qquad \textbf{2)}\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

▸ **Exercice 12**. ★★★ Théorème de d'Alembert.
Soit (u_n) une suite de nombre réels strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un nombre réel a.

1. Donner un exemple d'une telle suite pour laquelle on a $a = 0$. Même question avec $a = 1$ et $a = 2$.
2. On suppose que $a < 1$. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
3. On suppose que $a > 1$. Montrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
4. Supposons que $a = 1$, que peut-on dire sur la convergence de (u_n) ?