UE 3.2: Feuille d'exercice 1

1er septembre 2016

1. Trigonométrie

1. Rappeler le domaine de définition des fonctions cos et sin et rappeler les propriétés de ces fonctions vues en cours.
2. Donner la dérivée des fonctions cos et sin.
3. Calculer les intégrales suivantes.
   (a) $\int_0^{2\pi} \sin t dt$, $\int_0^{2\pi} \cos t dt$.
   (b) Les mêmes intégrales mais calculées entre $[-\pi, \pi]$ et $[0, \pi]$.
4. Donner les valeurs de $\cos(0)$, $\cos(\pi)$, $\cos(\pi/2)$, $\cos(2\pi)$, $\sin(0)$, $\sin(\pi)$, $\sin(\pi/2)$, $\sin(2\pi)$.
5. Rappeler les valeurs de $\cos(\theta+\pi)$ et $\sin(\theta+\pi)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ pour tout angle θ. On pourra s'aider d'un dessin du cercle trigonométrique.
6. Rappeler le signe de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et donner le tableau de variation (croissante/décroissante) des fonctions sin et cos sur $[0, 2\pi]$.
7. Rappeler la définition des fonctions arccos et arcsin. On spécifiera bien leur domaine de définition.
8. Donner les valeurs de $\arccos(-1)$, $\arccos(0)$, $\arccos(1)$, $\arcsin(-1)$, $\arcsin(0)$ et $\arcsin(1)$.

2. Formule du double angle

1. On rappelle la formule, $\forall \theta \in \mathbb{R}$,
$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}.$$
   Calculer $\cos(\pi/4)$ à l'aide de cette formule.
2. A l'aide de la formule de la question précédente et de $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, calculer $\sin^2(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$. En déduire la valeur de $\sin(\pi/4)$.
3. On appelle les formules donnant $\sin^2(\theta)$ et $\cos^2(\theta)$ à l'aide de $\cos(2\theta)$, les formules du *double angle*. Elles sont à connaître par coeur.
4. *Un calcul d'intégrale :*
   (a) Quelle est la dérivée de la fonction $\theta \to \sin(2\theta)$?
   (b) Calculer les intégrales $\int_0^{\pi} \cos(2t)dt$ et $\int_0^{\pi} 2\cos(t)dt$.
   (c) A l'aide de la formule du double angle, déterminer la valeur des intégrales $\int_0^{\pi} \sin^2(t)dt$ et $\int_0^{\pi} \cos^2(t)dt$.

3. Encore des formules trigonométriques

On rappelle les deux formules suivantes, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a+b) &= \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b). \end{aligned}$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Que vaut $\sin(-a)$ et $\cos(-a)$ en fonction de $\sin(a)$ et $\cos(a)$?
2. En écrivant que $a - b = a + (-b)$ et en utilisant les formules ci-dessus, écrire $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\sin(a)$, $\cos(b)$ et $\sin(b)$.
3. En écrivant que $0 = \theta - \theta$ et en calculant $\cos(\theta - \theta)$ à l'aide de la formule donnant $\cos(a-b)$, retrouver la formule $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

4. En écrivant que $2\theta = \theta + \theta$, appliquer les formules ci-dessus pour calculer $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. Retrouver alors les formules du double angle.
5. Dessinant un triangle équilatérale de côté 1. Quelle est l'angle (en radiant) formé par deux côtés ? En traçant une hauteur issue d'un sommet, déterminer la valeur de $\cos(\pi/3)$.
6. A l'aide de $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ (ou autrement), en déduire la valeur de $\sin(\pi/3)$.
7. En écrivant que $\pi/3 = \pi/6 + \pi/6$, en déduire les valeurs de $\cos(\pi/6)$ et $\sin(\pi/6)$.
8. Que vaut $\arccos(1/2)$ et $\arcsin(1/2)$?
9. Comme les formules de l'angle double, les formules donnant $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$ sont à connaître par coeur.

2. Fonctions composées

Soit $f : t \to t^3$, $g : t \to at + b$ où a et b sont des nombres réels et $h = \sin$.

— Déterminer les composées $f \circ g$, $g \circ f$, $h \circ g$ et $g \circ h \circ f$.

— Calculer les dérivées des fonctions composées précédentes.

3. Fonctions réciproques

— Qu'est-ce qu'une fonction réciproque ?

— Parmi les fonctions suivantes, indiquer lesquelles sont inversibles et déterminer leurs réciproques lorsqu'elles existent.

1. $t \to 2t$,
2. $t \to t^2$,
3. $t \to t^3$,
4. $t \to |t|$,
5. La fonction f définit par morceaux par $f(t) = 0$ pour $t \in [-1, 1]$ et $f(t) = 1$ pour $t \notin [-1, 1]$.
6. La fonction f définit par morceaux par $f(t) = t$ pour $t \in [-1, 1]$ et $f(t) = -t$ pour $t \notin [-1, 1]$.

4. Dérivées des fonctions trigonométriques réciproques

— Rappeler les intervalles de définition des fonctions arcsinus et arccosinus.

— A l'aide de la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, calculer $\cos \arcsin x$ et $\sin \arccos x$.

— En déduire que

$$\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad \arccos'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

— Calculer l'intégrale suivante $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

5. Changement de variable

1. On considère l'intégrale
$$I = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$
où ϕ est une fonction strictement croissante. Soit F une primitive de f, c'est à dire une fonction $F : t \to F(t)$ telle que $F' = f$.
— Vérifier que $(F \circ \phi)' = (f \circ \phi) \times \phi'$.
— En déduire que $I = F(\phi(b)) - F(\phi(a) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(s)ds$.
2. On considère maintenant l'intégrale
$$J = \int_a^b f(s)ds.$$
Soit ϕ une fonction régulière strictement croissante définie sur $[a, b]$.
— Rappeler la définition de la réciproque de ϕ.
— Montrer que $J = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt$. Cette formule, bien que compliquée est très importante dans les calculs d'intégrales. On l'appelle la *formule de changement de variable*.
3. Applications : Calculer les intégrales suivantes

— $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$, en utilisant le changement de variable $t = \sin\theta$.
— $\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}dt$, en utilisant le changement de variable $t = \sin\theta$.
— Vérifier d'abord que $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$. Puis calculer $\int_0^1 \frac{dt}{e^t+1}dt$ à l'aide du changement de variable $t = \ln u$.

7. La fonction arctangente

1. Rappeler la définition et les dérivées des fonctions tangentes et cotangentes.
2. Sur quelles intervalles les fonctions arctan et arccotan sont-elles définies ?
3. Calculer la dérivée de arctan.
4. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$.
5. Etudier le comportement de arctan en $\pm\infty$.
6. En déduire que la valeur de $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{du}{1+u^2}$.

8. Intégration par partie

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x$ et g la fonction définie par $g(x) = \exp(x)$. Déterminer la fonction fg ainsi que sa dérivée $(fg)'$.
2. Plus généralement, si f et g sont deux fonctions dérivables quelconques, rappeler l'expression de $(fg)'$ en fonction de f' et g'.
3. Soit a et b deux nombres réels. Montrer que
$$\int_a^b (fg)'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$
4. En déduire que
$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [(fg)(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$
Cette formule, bien que compliquée, est très importante dans les calculs d'intégrales. On l'appelle la *formule d'intégration par partie.*
5. Application 1 :
   (a) Calculer $\int_a^b \exp(x)dx$ en fonction de $\exp(a)$ et $\exp(b)$.
   (b) En déduire la valeur de $\int_0^t x\exp(x)dx$ en fonction de t. On pourra poser $f(x) = \exp(x)$ et $g(x) = x$.
6. Application 2 : En déduire la valeur de $\int_1^t \ln(x)dx$ en fonction t. On pourra poser $g(x) = \ln(x)$ et $f(x) = x$.

9. Logarithme, exponentielle et équation différentielle

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on admettra dans cette question qu'il existe une unique fonction vérifiant $f' = f$ ainsi que $f(b) = a$.

On notera exp la solution de cette équation différentielle verifiant $\exp(0) = 1$.

1. On veut d'abord montrer que exp est strictement positive.
   (a) Montrer que si exp n'est pas strictement positive, il existe b tel que $\exp(b) = 0$. (On pourra utiliser que exp est une fonction continue).
   (b) En déduire que $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que exp est une fonction strictement croissante.
3. En déduire que exp admet une fonction réciproque, notée ln, dont on précisera son ensemble de définition.
4. Calculer $\ln'$ en utilisant la méthode du calcul des dérivées des fonctions réciproques.