Licence 2, UE 3.2 — Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques — 2016-2017

TD : Equations différentielles

▸ Exercice 1. Savoir résoudre des équations homogènes du second ordre
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 4y + 2 = 0$.
2. $y'' - y' - 6y = 0$.
3. $y'' + y' + y = 0$.

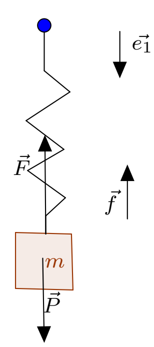
▸ Exercice 2. Savoir déterminer la solution associée à des conditions initiales
Trouver maintenant les solutions des équations de l'exercice 1 pour la condition initiale $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

▸ Exercice 3. Savoir résoudre des équations d'ordre 2 avec second membre.
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + y' + y = \cos(2t)$
2. $y'' - 4y' + 3y = e^{-2t}$
3. $y'' - 4y' + 3y = e^{t}$.
4. $y'' - y' + 6y = x^2$.

▸ Exercice 4. : Mise en oeuvre des savoir faire précédents sur le ressort amorti

On considère un système masse ressort amorti. On note $z(t)$ la position du ressort en fonction du temps t. La masse m est soumise au poids $\vec{P} = mg\vec{e_1}$, à la force de rappel du ressort $\vec{F}(t) = -kz(t)\vec{e_1}$ $(k > 0)$ et aux frottements visqueux de l'air $\vec{f}(t) = -\lambda\vec{v}(t)$ $(\lambda \geqslant 0)$ où $\vec{v}(t)$ est le vecteur vitesse à l'instant t.



1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, démontrez que
$$z''(t) + \frac{\lambda}{m}z'(t) + \frac{k}{m}z(t) = g.$$
2. Trouver une solution particulière à l'équation.
3. Les frottements de l'air sont d'une amplitude beaucoup moins forte que la constante de raideur du ressort. On peut donc supposer que $\lambda < 2k\sqrt{m}$. Quelles sont les solutions homogènes de l'équation ?
4. En déduire les solutions générales de cette équation.
5. On se donne maintenant une position et une vitesse initiale $z(0) = 0$, $z'(0) = 1$. Déterminer les solutions associées à ces conditions initiales. Combien y en a-t-il ?

6. Faites un programme python qui permette de tracer l'évolution de z en fonction du temps pour $g = 10$, $m = 1$, $k = 100$, $\lambda = 1$.
7. Tracer ensuite en python le portrait de phase : l'évolution de la vitesse z' (en ordonnées) en fonction de celle de z (en abscisses). Vers quoi va tendre la position ? Est-ce cohérent avec la physique de l'expérience ?