Licence 2, UE 3.2 — Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques — 2016-2017

Devoir maison 1 : Suites numériques

▸ **Exercice 1**. ★ **Validation de cours** Calculez la limite si elle existe des suites

$$\textbf{1)}\ u_n = \frac{n^3 + (-1)^n}{n - 5n^4 - e} \quad \textbf{2)}\ u_n = \frac{\ln n}{2^n} \quad \textbf{3)}\ u_n = \frac{\cos(n)}{n^5}, \quad \textbf{4)}\ u_n = \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1$$

▸ **Exercice 2**. ★★

On s'intéresse à l'intégrale dite de Wallis

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx.$$

1. Calculer I_0, I_1, I_2.
2. Grâce à une intégration par parties, démontrer que, pour tout $n \geq 0$, on a
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et minorée. Qu'en déduisez-vous ?
4. Démontrer que
$$\frac{n+1}{n+2} < \frac{I_{n+1}}{I_n} < 1.$$
En déduire la limite de I_{n+1}/I_n.
5. Démontrer que la suite (nI_nI_{n+1}) est constante.
6. En utilisant une question de ce problème, montrer par récurrence que, si $n = 2p$, on a
$$I_{2p} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{2p-1}{2p},$$
et si $n = 2p+1$, on a
$$I_{2p+1} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \frac{2p}{2p+1}.$$
7. Après avoir déterminé la limite de $\dfrac{(2p+1)I_{2p+1}}{2pI_{2p}}$, montrer que
$$\pi = \lim_{p \to +\infty} \frac{2^{4p}(p!)^4}{p(2p!)^2}.$$

▸ **Exercice 3**. ★★★ Séries alternées. **Pour cet exo, une rédaction par groupe de 3 ou 4. Objectif : Chaque membre du groupe potasse puis vous faites une session de confrontation (et éventuellement de recherche) dont le fruit est une rédaction validée par le groupe. Cette rédaction me sera rendue avec le nom des membres du groupe.**

1. Ecrire la définition de (u_n) converge vers l.
2. Démontrer le lemme suivant (dont vous vous souviendrez pour les séries numériques) : si (u_{2n}) converge vers l et (u_{2n+1}) converge vers l alors (u_n) converge vers l.
3. On considère la suite définie par $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^N}{N}$. Calculez pour $N \in \mathbb{N}^\star$, $S_{N+1} - S_N$. Quelle est sa limite ?
4. Trouvez l'erreur dans le raisonnement suivant : "$\forall N \in \mathbb{N}^\star, S_{2N} - S_{2N-1} = 1/2N \geqslant 0$. Donc (S_{2N}) est une suite croissante".
5. Démontrer proprement qu'au contraire (S_{2N}) est une suite décroissante et que (S_{2N+1}) est une suite croissante.
6. En déduire que (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes. Que pouvez-vous en conclure ?