Licence 2, UE 3.1 — Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques — 2016-2017

TD3 : Espaces vectoriels

Placez les savoir faire suivants dans le ou les exercices auxquels ils correspondent :
- Savoir démontrer qu'un ensemble est ou non un sous espace vectoriel.
- Savoir déterminer une famille génératrice d'un sev défini par des équations linéaires.
- Savoir déterminer une base d'un sev défini par des équations linéaires.
- Savoir résoudre un système linéaire par opérations sur les lignes (pivot de Gauss).

1 La méthode du pivot de Gauss sur un exemple

Voivi la méthode que vous aurez à utiliser pour résoudre les systèmes linéaires : le pivot de Gauss. Cette méthode consiste à isoler les inconnues en faisant des opérations sur les lignes et les colonnes. Voici les règles du jeu, vous avez le droit à uniquement quatre opérations, vous pouvez

1. échanger deux lignes i et j : $L_i \longleftrightarrow L_j$.
2. multiplier une ligne par un scalaire non nul : $L_i \longleftrightarrow \lambda L_i$, $\lambda \neq 0$.
3. remplacer une ligne $L_i \longleftarrow L_i - aL_j$ pour $i \neq j$, $a \in \mathbb{R}$.
4. remplacer la valeur d'une variable uniquement si elle est nulle.

Comment s'y prendre ? Traitons l'exemple du système suivant : la première étape consiste à placer les équations avec le plus d'inconnues en haut du système, pour cela on échange les lignes 1 et 3

$$\left\{\begin{aligned} y+z&=1\\ x+y-z&=-1\\ x-y-2z&=2\end{aligned}\right. \underset{L_1\longleftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{aligned} x-y-2z&=2\\ x+y-z&=-1\\ y+z&=1\end{aligned}\right.$$

Phase de descente : L'objectif est d'éliminer les inconnues des deux dernières équations afin d'obtenir un système de forme triangulaire. On commence par éliminer l'inconnue x de toutes les équations, il n'y a qu'une opération à faire sur la seconde équation puisque x est absent de la troisième.

$$\underset{L_2\longleftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{aligned} x-y-2z&=2\\ 2y+z&=-3\\ y+z&=1\end{aligned}\right.$$

On élimine maintenant la variable y de la dernière équation puis on multiplie la dernière ligne par 2 pour obtenir z

$$\underset{L_3\longleftarrow L_3-\frac{1}{2}L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{aligned} x-y-2z&=2\\ 2y+z&=-3\\ \frac{1}{2}z&=\frac{5}{2}\end{aligned}\right. \underset{L_3\longleftarrow 2L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{aligned} x-y-2z&=2\\ 2y+z&=-3\\ z&=5\end{aligned}\right.$$

Phase de remontée : L'objectif est maintenant de ne laisser qu'une inconnue par équation. On élimine d'abord z des deux premières équations en se servant de L_3.

$$\underset{L_2\longleftarrow L_2-L_3, L_1\longleftarrow L_1+2L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{aligned} x-y\quad&=12\\ 2y\quad&=-8\\ z&=5\end{aligned}\right.$$

Maintenant que z a disparu de L_2, on peut se servir de L_2 pour éliminer y de la première équation.

$$\underset{L_1\longleftarrow L_1+\frac{1}{2}L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{aligned} x&=8\\ 2y&=-8\\ z&=5\end{aligned}\right. \underset{L_2\longleftarrow \frac{1}{2}L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{aligned} x&=8\\ y&=-4\\ z&=5\end{aligned}\right.$$

2 Musculation

▸ **Exercice 1**. Résoudre les systèmes linéaires suivants à l'aide du pivot de Gauss

$$1)\left\{\begin{array}{l}2x+3y=0\\ x+2y=1\end{array}\right. \qquad 2)\left\{\begin{array}{l}2x-y=0\\ 5x+2y=9\end{array}\right. \qquad 3)\left\{\begin{array}{l}x+y=-1\\ -x-y=1\end{array}\right. \qquad 4)\left\{\begin{array}{l}2x+y+z=1\\ x+2y-z=-1\\ x-y-3z=2\end{array}\right.$$

$$5)\left\{\begin{array}{l}x+y+z=3\\ x-6y-2z=-7\\ 2x+y-3z=0\end{array}\right. \qquad 6)\left\{\begin{array}{l}2x+y+z=2\\ -x+2y-2z=-29\\ 3x-5y-z=63\end{array}\right. \qquad 7)\left\{\begin{array}{l}x+y+z=1\\ 2x+2y+2z=2\\ x-y-z=4\end{array}\right.$$

$$8)\left\{\begin{array}{l}x+y+2z-t=3\\ 3y-z+4t=-8\\ x+2y-3z+5t=-9\\ x+y-5z+6t=-11\end{array}\right. \qquad 9)\left\{\begin{array}{l}-x+y+z-t=4\\ 3y+t=5\\ x+y+4z+5t=1\\ x+y-5z-t=-2\end{array}\right. \qquad 10)\left\{\begin{array}{l}x-y+z-t=0\\ x+z=1\\ x+y-z-t=-1\\ x-y+t=1\end{array}\right.$$

✂ -

Réponses à trouver

1. $\{(-3,2)\}$.
2. $\{(1,2)\}$.
3. $\{(0,-1)+x(1,-1), x\in\mathbb{R}\}$.
4. $\{(1,-1,0)\}$.
5. $\{1,1,1)\}$.
6. $\{(5,-10,2)\}$.
7. $\{(5/2,0,-3/2)+y(0,1,-1), y\in\mathbb{R}\}$.
8. $\{(1,-z,z,z-2,z\in\mathbb{R})\}$.
9. $\{(x,2+\frac{x}{6},1+\frac{x}{3},-1-\frac{x}{2}), x\in\mathbb{R}\}$.
10. $\{(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{5}{6})\}$.

- ✂

▸ **Exercice 2**. Liens entre systèmes linéaires et espaces vectoriels
Dans tout cet exercice, on se place sur $\mathbb{R}^3$.

1. On considère le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{l}2x+y-z=0\\ x+2y+z=0\end{array}\right.$$

   Démontrer que l'ensemble des solutions de ce système $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|2x+y-z=0, x+2y+z=0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$. Donnez-en une base et la dimension.

2. Démontrez que $((1,1,1),(1,-1,0),(2,1,2))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ (ceci revient à résoudre un système linéaire).

3. Démontrez que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ où $\overrightarrow{u}=(1,0,1)$, $\overrightarrow{v}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{u}=(2,-1,0)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, vous prendrez un vecteur $\overrightarrow{a}=(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ et vous chercherez α,β,γ tels que $\overrightarrow{a}=\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}+\gamma\overrightarrow{w}$ (ceci revient encore à résoudre un système linéaire).