Licence 2, UE 3.1 — Institut Villebon-Charpak, Orsay

Mathématiques — 2016-2017

TD2 : Espaces vectoriels

Placez les savoir faire suivants dans le ou les exercices auxquels ils correspondent :

- Savoir écrire un vecteur comme combinaison linéaire d'autres vecteurs.
- Savoir démontrer qu'un ensemble est ou non un sous espace vectoriel.
- Savoir déterminer si une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base (avec ou sans l'utilisation du cardinal).
- Savoir déterminer une famille géneratrice d'un sev défini par des équations linéaires.
- Savoir déterminer une base d'un sev défini par des équations linéaires.
- Savoir identifier la nature géométrique d'un sev.
- Savoir écrire ce qu'est le sev engendré par plusieurs vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
- Savoir résoudre un système linéaire par opérations sur les lignes (pivot de Gauss).

▸ **Exercice 1**. Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{R}$, le vecteur $u = (1, -2, k)$ de $\mathbb{R}^3$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $v = (3, 0, 2)$ et $w = (2, -1, 5)$?

▸ **Exercice 2**. Montrer que chacun des ensembles suivants est un sev d'un espace que vous préciserez. Déterminer une famille génératrice puis une base de ces sev. Donner enfin leur dimension.

1. $F = \{\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 2y = 0\}$.
2. $F = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y = 0\}$.
3. $F = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + z = 0 = x\}$.
4. $F = \{\vec{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y - z = 0 = x + t\}$.
5. $F = \{\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$.

▸ **Exercice 3**. Soient les sev F et G de $\mathbb{R}^3$,

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -x + y - z = 0\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3y - z = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont bien des sev de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice puis une base de F et de G. A quels objets géométriques correspondent ces deux sev ?
3. Considérons $F \cap G$. Expliquez pourquoi il s'agit d'un sev.
4. Déterminer une famille génératrice puis une une base de $F \cap G$. Quel objet géométrique est $F \cap G$?

▸ **Exercice 4**. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1, 1)$ et $\overrightarrow{v} = (2, 1)$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Rappeler la définition de l'ensemble du sous espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs $\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$.
2. Donner la définition du sous espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ noté Vect($\overrightarrow{u}$). De quel objet géométrique s'agit-il ?

3. Donner en une base et la dimension.
4. Donner la définition du sous espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ noté $\text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. De quel objet géométrique s'agit-il ? La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est-elle génératrice dans $\mathbb{R}^2$?

▸ **Exercice 5**. Vrai ou faux

1. Soient $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_4})$ une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On peut choisir ces vecteurs de sorte que cette famille soit libre dans $\mathbb{R}^3$.
2. On peut trouver une famille génératrice de cardinal strictement inférieur à 4 dans $\mathbb{R}^4$.

▸ **Exercice 6**. Dire si les familles suivantes sont des bases de $\mathbb{R}^3$:

1. Dans $\mathbb{R}^3$: $((1,0,-1),(2,1,0),(-1,0,0))$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$: $((1,1,1),(2,1,0),(2,2,0))$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$: $((1,1,1),(-2,0,0),(0,-2,-2))$.

▸ **Exercice 7**. Résolution de systèmes linéaires

Résoudre les systèmes linéaires suivants non pas par substitution mais en effectuant des opérations sur les lignes du système.

$$1)\left\{\begin{array}{l} 2x+y=0 \\ x+2y=1 \end{array}\right. \qquad 2)\left\{\begin{array}{l} 2x+y=0 \\ 4x+2y=0 \end{array}\right. \qquad 3)\left\{\begin{array}{l} 2x+y+z=1 \\ x+2y-z=-1 \\ x-y-z=0 \end{array}\right.$$

▸ **Exercice 8**. **Pour aller plus loin : Un regard nouveau sur les équations différentielles**

1. On se donne a une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et A une primitive de a. Donner l'ensemble des solutions S_H de l'équation différentielle d'ordre 1 suivante :
$$y' - a(t)y = 0$$
2. On peut montrer que S_H a une structure d'ev. Essayez d'en deviner une famille génératrice, une base et sa dimension.
3. On considère maintenant l'équation $y'' - 6y' + 5y = 0$. Donner l'ensemble des solutions S_H de cette équation.
4. On peut montrer que S_H a une structure d'ev. Essayez d'en deviner une famille génératrice, une base et sa dimension.