Licence 2, UE 3.1 — Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques — 2016-2017

TD1 : Espaces vectoriels

Placez les savoir faire suivants dans le ou les exercices auxquels ils correspondent :
— Savoir démontrer qu'un ensemble est ou non un sous espace vectoriel.
— Savoir déterminer si une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre ou liée.

▸ **Exercice 1**. Dessinez chacun des sous ensembles de $\mathbb{R}^n$ (n dépend de chaque question) suivants, devinez avec le dessin s'il s'agit de sev de $\mathbb{R}^n$ puis démontrez le proprement.

1. $F = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{R}\}$.
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geqslant 0\}$.
3. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -2x + y = 0\}$.
4. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y = 0\}$.
5. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$.
6. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 1\}$.

▸ **Exercice 2**. On rappelle que :
• $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables et de dérivée continue sur $\mathbb{R}$
• $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables deux fois et de dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$.
• $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites réelles.
Démontrer que les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel que vous préciserez :

1. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f(0) = 0\}$.
2. $F = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) | \int_0^1 f(t)dt = f(0)\}$.
3. $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | M_{11} + M_{22} = 0\}$.
4. $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - f(x) = 0\}$. Pouvez-vous déterminer F ?
5. $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0\}$. Pouvez-vous déterminer F ?
6. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n\}$. Pouvez-vous déterminer F ?
7. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 4u_{n+1} + 3u_n = 0\}$. Pouvez-vous déterminer F ?

▸ **Exercice 3**. Dire si les familles suivantes sont libres ou liées :

1. Dans $\mathbb{R}^2$: $((1, 1), (2, 1))$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$: $((1, 1, 1), (2, 1, 0), (-1, 1, 0))$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$: $((1, 1, 1), (2, 1, 0), (2, 2, 2))$.
4. Dans $\mathbb{R}^3$: $((1, 0, 1), (2, 0, 0), (0, 0, 2))$.

▸ **Exercice 4**. Ouverture sur les familles génératrices
On considère l'ensemble suivant : $F = \{(\alpha, \beta, \alpha + \beta) | \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$.

1. Soit $\overrightarrow{x}$ un élément de F, déterminer $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ de sorte que $\overrightarrow{x} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$. On dit alors que $\overrightarrow{x}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Notez qu'avec cette question, vous avez montré que tout élément de F s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On dit que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une famille génératrice de F.
2. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est-elle libre ou liée ?
3. On se donne maintenant $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - 3z = 0\}$. Soit $\overrightarrow{x} = (x, y, z)$ un élément de G. Exprimer x en fonction de y et z. En déduire une écriture de G sous une forme semblable à F.
4. Trouver comme à la question 1, deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de sorte que tout élément de G soit combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.