Licence 2, UE 3.1 Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques 2016-2017

DM : espaces vectoriels

▸ **Exercice 1**. **Systèmes linéaires et espaces vectoriels**
L'objectif de cet exercice est de comprendre quelle est la structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.
On commence par se placer sur $\mathbb{R}^3$.

1. Résoudre **en faisant des opérations sur les lignes**, le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+2y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

   Déterminer ainsi l'ensemble $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+2y+3z=0, x+2y-z=0, x-y-z=0\}$. Est-ce un sev de $\mathbb{R}^3$? Quelle en est sa dimension ?
2. Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+2y+3z=0, x+2y-z=0\}$. Démontrez qu'il s'agit d'un sev de $\mathbb{R}^3$ et déterminez-en une base. Quelle est sa dimension ?
3. Soit $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+2y+3z=0\}$. Démontrez qu'il s'agit d'un sev de $\mathbb{R}^3$ et déterminez-en une base. Quelle est sa dimension ?
4. **Bonus :** Conjecturer au vu des questions précédentes la dimension d'un sev de $\mathbb{R}^n$ caractérisé par p équations indépendantes ?

▸ **Exercice 2**. **Au carrefour des équations différentielles, des espaces vectoriels et des systèmes linéaires**

1. Considérons l'équation

$$(E): \quad y''+4y'+4y=x^2.$$

   Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène.
2. **Bonus :** Donner une famille génératrice puis une base de l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Quelle est sa dimension ?
3. Soit a,b,c trois réels, et $y_0 : x \mapsto ax^2+bx+c$. Donner les valeurs de a,b,c telles ques y_0 soit solution particulière de (E) (on exhibera un système linéaire portant sur a,b,c qu'on résolvera par opérations sur les lignes).
4. Donner les solutions générales de (E).

▸ **Exercice 3**. **Le début des applications linéaires** On considère la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \overrightarrow{u}=(x,y,z) \longrightarrow x+y+z \end{array}$$

1. Soient λ,μ deux réels et $\overrightarrow{u}=(x_1,y_1,z_1)$, $\overrightarrow{v}=(x_2,y_2,z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, écrire les coordonnées du vecteur $\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}$.

2. En déduire la valeur de $f(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v})$.
3. Calculer aussi $f(\overrightarrow{u})$ et $f(\overrightarrow{v})$ et démontrer que

$$f(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v})=\lambda f(\overrightarrow{u})+\mu f(\overrightarrow{v}).$$

   On dit alors qu'une application f vérifiant cette égalité pour tout $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\lambda,\mu$ est une application linéaire.
4. On appelle noyau de l'application linéaire f l'ensemble

$$\ker(f)=\{\overrightarrow{u}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, f(\overrightarrow{u})=0\}$$

   (ker signifie "kernel" qui en anglais veut dire noyau). Démontrer que $\ker(f)$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminez en écrivant ce que signifie l'équation $f(\overrightarrow{u})=0$ en termes de coordonnées une famille génératrice puis une base de $\ker(f)$. Quelle est sa dimension ?