TD4 : Applications linéaires

mettre un peu de produit scalare pour le type 1 interdis ?
Placez les savoir faire suivants dans le ou les exercices auxquels ils correspondent :

- Savoir reconnaître une application linéaire d'une application non linéaire.
- Savoir démontrer qu'une application est linéaire.
- Savoir démontrer qu'un ensemble est un sev en l'écrivant comme le noyau d'une application linéaire.
- Savoir trouver une base d'un sev défini par des équations reliant x à y.
- Savoir démontrer qu'une application linéaire est injective à l'aide du noyau.
- Savoir résoudre un système linéaire à l'aide du pivot de Gauss.

▸ **Exercice 1**. Dire si les applications suivantes sont linéaires ou non et si oui démontrez-le

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{u} = (x,y) & \mapsto & x+2y \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{u} = (x,y) & \mapsto & x^3-y+2x \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{u} = (x,y,z) & \mapsto & (-z,5x,6x+z+2) \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ \overrightarrow{u} = (x,y,z) & \mapsto & (x-z,y-2z,x+3z,6y) \end{array}$

▸ **Exercice 2**. Montrer que les ensembles suivants sont des sev d'un ev que vous préciserez **en utilisant le fait que ce sont des noyaux d'une application linéaire à préciser.**

1. $F = \{\overrightarrow{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}$.
2. $F = \{\overrightarrow{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 3y\}$.
3. $F = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x-3y+2z = 0, x = 2z\}$.
4. $F = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 3x-5y+2z = 0, 2x = z\}$.

▸ **Exercice 3**. Les applications linéaires suivantes sont-elles injectives ?

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{u} = (x,y) & \mapsto & (x+2y,x) \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{u} = (x,y) & \mapsto & (2x-y,x+z) \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{u} = (x,y) & \mapsto & x-y \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ \overrightarrow{u} = (x,y,z) & \mapsto & (x-z,y-2z) \end{array}$
5. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{u} = (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z,x+y+2z,2x-y+3z) \end{array}$
6. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{u} = (x,y,z) & \mapsto & (x-z,2x-2z,y) \end{array}$

▸ **Exercice 4**. Reprenez dans l'exercice précédent toutes les applications qui ne sont pas injectives et déterminez une base de leur noyau. En déduire la dimension de ces noyaux.

▸ **Exercice 5**. Soient p, n, k trois entiers naturels non nuls, on se donne $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et une famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

1. Si $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k})$ est libre, comparer k à n.
2. Supposons que f soit injective et que $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k})$ soit une famille libre, démontrez que $(f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_k}))$ est libre.
3. Si $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k})$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$, comparer k à n.
4. Supposons que f soit surjective et que $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k})$ soit une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$, démontrez que $(f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_k}))$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$.
5. Si $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k})$ est une base de $\mathbb{R}^n$, comparer k à n.
6. Supposons que f soit bijective et que $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k})$ soit une base de $\mathbb{R}^n$, démontrez que $(f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_k}))$ est une base de $\mathbb{R}^n$.