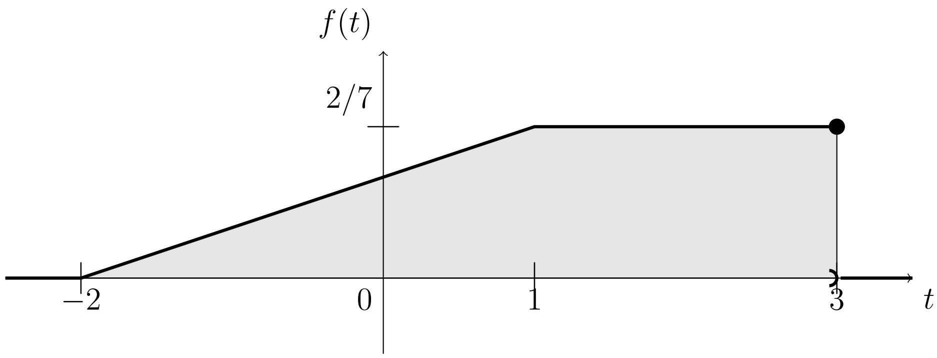
Corrigé du TD3 : variables aléatoires à densité

Exercice 1 :

1. La fonction f est une densité si elle est positive, et d'intégrale 1 sur tout $\mathbb{R}$. La positivité impose déjà que $a \geq 0$. On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = a \cdot \int_{-2}^{1} (t+2)\mathrm{d}t + 3 \cdot a \cdot \int_{1}^{3} \mathrm{d}t = \frac{9}{2}a + 6a = \frac{21}{2}a$$

donc : $a = \frac{2}{21}$.



2. La fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{sur} &]-\infty;-2] \\ \frac{1}{21} \cdot (x+2)^2 & \text{sur} & [-2;1] \\ \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \cdot (x-1) & \text{sur} & [1;3] \\ 1 & \text{sur} & [3;+\infty[\end{cases}$$

Et on laisse tracer le graphe.

3. Les probabilités se déduisent directement de la fonction de répartition calculée ci-dessus. Comme on est dans le cadre d'une variable aléatoire à densité, la fonction de répartition est continue, et on pourra remplacer (quand cela nous arrange) les inégalités larges par des inégalités strictes (et réciproquement) dans les probabilités. On trouve :

- $P(X \leq 0) = F_X(0) = \frac{4}{21}$;
- $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F_X(5) = 0$;
- $P(|X| < 1) = P(X \in]-1;1[) = P(X \in]-1;1]) = F_X(1) - F_X(-1) = \frac{1}{21}(3^2 - 1^2) = \frac{8}{21}$;
- $P(|X-1| < 1) = P(X \in]0;2[) = P(X \in]0;2]) = F_X(0) - F_X(2) = \frac{5}{7} - \frac{4}{21} = \frac{11}{21}$;

4. On a les quantités suivantes :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t)\mathrm{d}t = \frac{8}{21}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot f(t)\mathrm{d}t = \frac{131}{126}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{263}{294}$$

Exercice 2 :

1. Pour calculer l'intégrale de f, on fait deux intégrations par parties. Pour $A > 0$, on effectue les intégrations par parties sur les intervalles $[0, A]$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\int_0^A t^2 e^{-bt}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{t^2}{b}e^{-bt}\right]_0^A - \int_0^A \frac{-2t}{b}e^{-bt}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{A^2}{b}e^{-bA} + \frac{2}{b}\int_0^A te^{-bt}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{A^2}{b}e^{-bA} + \frac{2}{b}\left[-\frac{t}{b}e^{-bt}\right]_0^A - \frac{2}{b}\int_0^A \frac{-1}{b}e^{-bt}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{A^2}{b}e^{-bA} - \frac{2A}{b^2}e^{-bA} + \frac{2}{b^3}\cdot\left(1 - e^{-bA}\right)
\end{aligned}$$

Comme l'intégrale de f doit être égale à 1 sur $\mathbb{R}$, et que f doit être positive, cela veut dire que a et b doivent être positifs.On fait ensuite tendre A vers $+\infty$, et on déduit :

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-bt}\mathrm{d}t = \frac{2}{b^3}$$

car tous les termes en e^{-bA} s'annulent (comme $b > 0$, par croissance comparée entre les polynômes et l'exponentielle). Et finalement,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} at^2 e^{-bt}\mathrm{d}t = \frac{2a}{b^3}$$

On calcule de la même manière l'espérance de X, qui est égale à : $\int_0^{+\infty} t \cdot f(t)\mathrm{d}t$. En faisant cette fois-ci trois intégrations par parties, on trouve finalement :

$$E(X) = \frac{6a}{b^4}.$$

2. D'après la question 1., les réels a et b vérifient :

$$\begin{cases} \dfrac{2a}{b^3} = 1 \\ \dfrac{6a}{b^4} = 100 \end{cases}$$

et donc finalement :

$$a = 27/2000000 \qquad \text{et} \qquad b = 3/100.$$

Exercice 3 :

1. On pose le changement de variable $u = \frac{at^2}{2}$. On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} ate^{-\frac{at^2}{2}}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = 1$$

et ce pour toute valeur de $a > 0$.

La fonction de répartition de X se déduit du même changement de variable. Si $x > 0$, on a :

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{x} ate^{-\frac{at^2}{2}}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{ax^2}{2}} e^{-u}\mathrm{d}u = 1 - e^{-\frac{ax^2}{2}}.$$

Et finalement :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad]-\infty; 0] \\ 1 - e^{-\frac{ax^2}{2}} & \text{sur} \quad [0; +\infty[\end{cases}$$

2. La durée de vie moyenne est donnée par l'espérance de X, à savoir :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

En faisant une intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^A t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^A + \int_0^A e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

et en faisant tendre A vers $+\infty$ on a finalement :

$$E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

3. a .Posons X_1 et X_2 les variables aléatoires associées à chaque ampoule (qui suivent chacune la loi de X). On a :

$$Y \leq y \Leftrightarrow X_1 \leq y \ \textbf{ET} \ X_2 \leq y.$$

Comme les deux ampoules sont indépendantes, la loi du couple (X_1, X_2) et donc le produit des lois marginales.

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X_1 \leq y) \cdot P(X_2 \leq y) = (F_X(y))^2 \\ = 1 - 2e^{-\frac{y^2}{2}} + e^{-y^2}. \end{aligned}$$

La fonction F_Y est continue, et la variable aléatoire Y admet pour loi de densité la fonction :

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = 2ye^{-\frac{y^2}{2}}\left[1 - e^{-\frac{y^2}{2}}\right].$$

b. La durée de vie moyenne du système est donnée grâce à l'espérance par :

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} 2t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} 2t^2 e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

et on trouve donc une durée de vie moyenne augmentée d'environ 29% par rapport à celle d'une ampoule seule.

Exercice 4 :

1. On fait le changement de variable $u = \lambda t$. On trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = 1$$

et ce pour toute valeur de λ. Comme il est immédiat que f est positive, alors on a finalement que f est bien une densité.

2. a. On fait une nouvelle fois le changement de variable $u = \lambda t$. On a :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \int_0^{\lambda x} e^{-u}\mathrm{d}u = 1 - e^{-\lambda x}$$

b. On procède par intégration par parties. Pour $A > 0$, on a :

$$\int_0^A t\lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = -Ae^{-\lambda A} + \frac{1 - e^{-\lambda A}}{\lambda}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ (et en utilisant les croissances comparées des fonctions polynômes avec l'exponentielle) on déduit :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}.$$

c. Une première remarque consiste à voir que l'événement $X > x + h$ implique l'événement $X > x$. Ainsi, on a : $(X > x + h) \subset (X > x)$, et donc $(X > x + h) \cap (X > x) = (X > x + h)$.

On déduit :

$$\begin{aligned} P((X > x + h) \mid (X > x)) &= \frac{P((X > x + h) \cap (X > x))}{P(X > x)} = \frac{P(X > x + h)}{P(X > x)} \\ &= \frac{1 - F_X(x + h)}{1 - F_X(x)} = \frac{e^{-\lambda(x+h)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda h} = 1 - F_X(h) = P(X > h) \end{aligned}$$

d'où le résultat cherché.