TD3 : variables aléatoires à densité

Exercice 1 : On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a \cdot (x+2) \cdot 1_{[-2,1]}(x) + 3 \cdot a \cdot 1_{]1,3]}(x).$$

1. Déterminer pour quelle valeur de a la fonction f est une densité. Puis tracer le graphe de f pour cette valeur de a. On suppose dans la suite qu'on est dans cette situation pour la valeur de a.

2. On considère X la variable aléatoire de densité de probabilité f. Déterminer la fonction de répartition de X et tracer son graphe.

3. Donner les probabilités suivantes :
- $P(X \leq 0)$;
- $P(X \geq 5)$;
- $P(|X| < 1)$;
- $P(|X-1| < 1)$.

4. Calculer $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 2 : On considère une ampoule, dont la durée de fonctionnement est donnée (en jours) par la variable aléatoire X dont la densité de probabilité est donnée par la fonction :

$$f(t) = at^2 \cdot e^{-bt} \cdot 1_{[0,+\infty[}(t).$$

1. Exprimer, en fonction de a et b, l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que l'espérance de X.

2. En déduire les valeurs de a et b, sachant que l'espérance de X est égale à 100 jours.

Exercice 3 : On se donne $a > 0$, et on pose f la fonction définie par :

$$f(t) = a \cdot te^{-\frac{at^2}{2}} \cdot 1_{[0,+\infty[}(t).$$

1. Montrer que f est une densité, puis donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X dont la densité de probabilité est f.

2. On suppose désormais que $a = 1$, et on considère que la variable aléatoire X décrit la durée de vie d'une ampoule. Calculer la durée de vie moyenne de cette ampoule. On rappelle que : $\int_0^{+\infty} e^{\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3. On considère un système constitué de deux ampoules. Le système est fonctionnel si l'une ou l'autre des ampoules brille. On suppose enfin que les variables aléatoires X_1 et X_2

(qui suivent la même loi que X) qui décrivent les durées de vie des deux ampoules sont indépendantes. On note enfin Y la durée de vie du système.

a. Donner la fonction de répartition de Y, et en déduire sa fonction de répartition.

b. Calculer la durée de vie moyenne du système.

Exercice 4 : On se donne $\lambda > 0$ et on pose f la fonction définie par :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \cdot 1_{[0,+\infty[}(t).$$

1. Montrer que f est une densité.

2. On considère X la variable aléatoire dont la densité de probabilité est f (par exemple : X peut caractériser la durée de vie d'une ampoule).

a. Calculer la fonction de répartition de X.

b. Calculer l'espérance et la variance de X.

c. Démontrer que la loi de X est "sans mémoire", c'est-à-dire que :

$$\forall x \geq 0, \forall h \geq 0, P(X > x + h \mid X > x) = P(X > h).$$