Corrigé du TD2 : variables aléatoires discrètes

Exercice 1 :

1. Le dé étant équilibré, on a : $(\forall i \in \{1, \ldots, 6\})\ P(X_1 = i) = 1/6$.
On déduit alors : $E(X_1) = 7/2$ et $\text{Var}(X_1) = 35/12$.

2. On a les probabilités suivantes :

- $P(X_2 = -2) = 1/6$;
- $P(X_2 = 0) = 2/6 = 1/3$;
- $P(X_2 = 1) = 2/6 = 1/3$;
- $P(X_2 = 6) = 1/6$.

On en déduit alors : $E(X_2) = 1$ et $\text{Var}(X_2) = 6$.
La fonction de répartition de X_2 est alors :

$$F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty; -2[\\ 1/6 \text{ si } x \in [-2; 0[\\ 1/2 \text{ si } x \in [0; 1[\\ 5/6 \text{ si } x \in [1; 6[\\ 1 \text{ si } x \in [6; +\infty[\end{cases}$$

Et il suffit de tracer cette fonction.

3. On a les probabilités suivantes :

- $P(X_3 = 16) = 1/3$;
- $P(X_3 = 36) = 1/2$;
- $P(X_3 = 100) = 1/6$;

On en déduit alors : $E(X_3) = 40$ et $\text{Var}(X_3) = 800$.
La fonction de répartition de X_3 est alors :

$$F_{X_3}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty; 16[\\ 1/3 \text{ si } x \in [16; 36[\\ 5/6 \text{ si } x \in [36; 100[\\ 1 \text{ si } x \in [100; +\infty[\end{cases}$$

Et il suffit de tracer cette fonction.

Exercice 2 :

1. On ne considère que la partie “tirer des boules”. On est dans le cas de tirages successifs sans remise, donc il y a : $A_{10}^2 = 90$ tirages possibles. Parmi ces tirages, il y en a 18 qui

contiennent la boule noire (9 contenant la boule noire comme première boule, et 9 la contenant comme seconde). On en déduit que :

$$P(N) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$$

On peut aussi raisonner en disant que, comme les tirages sont sans remise et qu'on ne distingue pas les cas où la boule noire est tirée en première ou en deuxième, cela revient à se placer dans le cadre des tirages simultanés. On a alors 45 tirages possibles, dont 9 contiennent la boule noire. On retrouve la même probabilité.

2. On distingue les deux manières de gagner, qu'on note G_1 et G_2. Le lancer du dé et le tirage des boules constituent deux ecpérience indépendantes. On en déduit que :

$$P(G_1) = P(N) \cdot 1/2 \quad \textit{et} \quad P(G_2) = P(\overline{N}) \cdot 1/6$$

et finalement, comme les événements G_1 et G_2 sont incompatibles :

$$P(G) = P(G_1) \cup P(G_2) = 1/10 + 4/30 = 7/30.$$

3. On cherche ici à calculer la quantité : $P_{\overline{G}}(N)$ (la probabilité qu'il a tiré la boule noire sachant qu'il a perdu). On a :

$$P_{\overline{G}}(N) = \frac{P(N \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{P(N \setminus G)}{1 - P(G)} = \frac{P(N) - P(G_1)}{1 - P(G)} = \frac{1/5 - 1/10}{23/30} = \frac{3}{23}$$

4.a. $X(\Omega) = \{-m, 0, 4\}$. La loi de probabilité est donnée par :

- $P(X = -m) = P(\overline{N} \cap \overline{G}) = 2/3$;
- $P(X = 0) = P(N \cap \overline{G}) = 1/10$;
- $P(X = 4) = P(G) = 7/30$;

b. On suppose que m est positif (ce qui n'est pas trop absurde). Cela permet de plus facilement tracer la fonction de répartition. La fonction de répartition de X est alors :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty; -m[\\ 2/3 \text{ si } x \in [-m; 0[\\ 23/30 \text{ si } x \in [0; 4[\\ 1 \text{ si } x \in [4; +\infty[\end{cases}$$

c. L'espérance est alors donnée par :

$$E(X) = -m \cdot 2/3 + 0 \cdot 1/10 + 4 \cdot 7/30 = \frac{2}{3}\left(\frac{7}{5} - m\right).$$

Le jeu est donc équitable pour $m = 7/5$.

Exercice 3 : 1. $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. La loi de probabilité est donnée par : $(\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\})$ $P(X = i) = 1/5$.

2. On a directement $E(X) = 3$. Cela veur dire que, en moyenne, le concierge trouvera à la troisième clé celle qui ouvre la porte.

3. Si deux clés ouvrent la porte, alors on a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$. On a alors :

- $P(X = 1) = 2/5$;
- $P(X = 2) = 3/5 \cdot 2/4 = 3/10$;
- $P(X = 3) = 3/5 \cdot 2/4 \cdot 2/3 = 1/5$;
- $P(X = 4) = 3/5 \cdot 2/4 \cdot 1/3 \cdot 2/2 = 1/10$.

On en déduit $E(X) = 2$: le concierge trouvera en moyenne la bonne clés au deuxième essai dans cetet situation.

Exercice 4 : On utilise la linéarité de l'espérance, et le fait que $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (et donc ici $E(X^2) = \mathrm{Var}(X) + E(X)^2 = 5$).

- $E(2X - 6) = 2 \cdot E(X) - 6 = -10$;
- $E((4 - 5X)^2) = E(16 - 40X + 25X^2) = 16 - 40E(X) + 25E(X^2) = 221$;
- $\mathrm{Var}(10^8 - 2X) = \mathrm{Var}(-2X) = 4 \cdot \mathrm{Var}(X) = 4$.

Exercice 4 :

1. On a $X(\Omega) = \{1, 0, a\}$. La loi de X est donnée par :

- $P(X = 1) = 1/2$;
- $P(X = 0) = 1/8$;
- $P(X = a) = 3/8$.

2. L'espérance est donnée par :

$$E(X) = 1 \cdot 1/2 + a \cdot 3/8 = \frac{3}{8}(4/3 + a)$$

donc l'espérance est nulle pour $a = -4/3$.