TD2 : variables aléatoires discrètes

Exercice 1 : On lance un dé équilibré à six faces.

1. On note X_1 la variable aléatoire qui rend la valeur de la face du dé. Déterminer la loi de probabilité de X_1, puis calculer son espérance et sa variance.

2. On note X_2 la variable aléatoire qui rend -2 si le numéro sortant est 1, 0 si le numéro est 2 ou 4, 1 si le numéro est 3 ou 5, et 6 si le numéro est 6. Déterminer la loi de X_2, calculer son espérance et sa variance, puis calculer et tracer le graphe de sa fonction de répartition.

3. On note $X_3 = (2 \cdot X_1 - 6)^2$. Déterminer la loi de X_3, calculer son espérance et sa variance, puis calculer et tracer le graphe de sa fonction de répartition.

Exercice 2 : On considère une urne qui contient dix boules, parmi lesquelles 9 sont blanches et la dernière est noire. On tire successivement et sans remise deux boules, puis on lance un dé équilibré à six faces.

L'expérience se déroule comme suit :

– si la boule noire est tirée : il faut obtenir un nombre pair sur le dé pour gagner ;

– si toutes les boules tirées sont blanches : il faut obtenir un 6 pour gagner.

On considère les événements $N =$"la boule noire est tirée" et $G =$"le joueur gagne".

1. Déterminer la probabilité de l'événement N.

2. Déterminer la probabilité de l'événement G.

3. On suppose que le joueur a perdu : quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

4. Pour jouer, on suppose que le joueur a misé m. Le joueur gagne alors de l'argent selon les conditions suivantes :

– si le joueur gagne, il récupère 4 euros en plus de sa mise (c'est-à-dire qu'il a un gain total de 4 euros) ;

– s'il perd en tirant la boule noire, il reçoit m (c'est-à-dire qu'il récupère sa mise, et le gain total est de 0) ;

– s'il perd sans tirer la boule noire, il ne reçoit rien (c'est-à-dire que le gain total est de $-m$).

On note X la variable aléatoire des gains du joueur.

a. Déterminer $X(\Omega)$, et donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer et tracer de le graphe de la fonction de répartition de X.

c. Calculer l'espérance en fonction de m. Et en déduire pour quelles valeurs de m le jeu est équitable (c'est-à-dire pour quelles valeurs de m l'espérance de X est nulle).

Exercice 3 : Un concierge possède un trousseau de 5 clés, dont une seule ouvre une porte. Il essaie successivement les clés, jusqu'à obtenir celle qui ouvre la porte. On note X la variable aléatoire du nombre d'essais nécessaires au concierge pour ouvrir la porte.

1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance de X, et dire ce que représente cette quantité.
3. Mêmes questions si deux clés ouvrent la porte.

Exercice 4 : On considère X une variable aléatoire discrète dont l'espérance est $E(X) = -2$ et la variance est $\mathrm{Var}(X) = 1$. Calculer les quantités suivantes :

- $E(2X - 6)$;
- $E((4 - 5X)^2)$;
- $\mathrm{Var}(10^8 - 2X)$.

Exercice 5 : On lance successivement trois pièces, et on note les résultats obtenus. On gagne 1 euro si on obtient Pile au premier lancer, 0 euro si on obtient Face les trois fois, et a euros dans les autres cas. On note X la variable aléatoire du gain.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
2. Déterminer pour quelle valeur de a l'espérance de X est nulle (c'et-à-dire pour quelle valeur de a le jeu est équitable).