Corrigé du TD1 : les espaces de probabilité

Exercice 1 : On numérote les cartes de 1 à 32 (pour simplifier les écritures).

1. $\Omega = \big\{\{i,j,k,l,m\}\ ,\ 1 \leq i,j,k,l,m \leq 32\ et\ i \neq j \neq k \neq l \neq m\big\}$, et d'après le cours on a donc $|\Omega| = \binom{32}{5} = 201376$.

2. Notons A l'événement "tirer un carré d'As". En tant que sous-ensemble de Ω, on peut écrire A comme :

$$A = \big\{\{As\spadesuit, As\heartsuit, As\diamondsuit, As\clubsuit, m\}\ , m \neq As\big\}.$$

Les éléments de l'ensemble A sont donc entièrement paramétrés par le choix de m. Il y a 28 choix pour m (à savoir toutes les cartes qui ne sont pas des As), c'est-à-dire que : $|A| = 28$. Et ainsi : $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{28}{201376} = \frac{1}{7192}$.

Pour un carré quelconque, il suffit de faire les constatations suivantes :

– la probabilité de tirer un carré d'une valeur donnée est la même que celle de tirer un carré d'As (par symétrie des valeurs des cartes) ;

– il est impossible de tirer deux carrés de valeurs différentes, donc, une fois deux valeurs i et j distinctes fixées, les événements "tirer un carré de i" et "tirer un carré de j" sont disjoints ;

– comme on a un jeu de 32 cartes, il y a 8 valeurs différentes de cartes.

Ainsi, on en déduit que la probabilité de tirer un carré quelconque est de : $8 \cdot P(A) = \frac{8}{7192} = \frac{1}{899}$.

3. Posons D_n l'événement "tirer exactement n coeurs". Comme on tirer 5 cartes les événements possibles correspondront aux cas où $n \in \{0,\dots,5\}$. Les ensembles D_n sont comme suit :

$$\begin{aligned}
D_0 &= \big\{\{i,j,k,l,m\}\ , i \neq j \neq k \neq l \neq m\ et\ i,j,k,l,m \notin \heartsuit\big\}\\
D_1 &= \big\{\{i,j,k,l,m\}\ , i \neq j \neq k \neq l \neq m\ ,\ i \in \heartsuit\ et\ j,k,l,m \notin \heartsuit\big\}\\
D_2 &= \big\{\{i,j,k,l,m\}\ , i \neq j \neq k \neq l \neq m\ ,\ i,j \in \heartsuit\ et\ k,l,m \notin \heartsuit\big\}\\
D_3 &= \big\{\{i,j,k,l,m\}\ , i \neq j \neq k \neq l \neq m\ ,\ i,j,k \in \heartsuit\ et\ l,m \notin \heartsuit\big\}\\
D_4 &= \big\{\{i,j,k,l,m\}\ , i \neq j \neq k \neq l \neq m\ ,\ i,j,k,l \in \heartsuit\ et\ m \notin \heartsuit\big\}\\
D_5 &= \big\{\{i,j,k,l,m\}\ , i \neq j \neq k \neq l \neq m\ et\ i,j,k,l,m \in \heartsuit\big\}
\end{aligned}$$

Choisir un élément de l'ensemble D_n revient à choisir n coeurs et $(5-n)$ non-coeurs, c'est à dire que l'ensemble D_n vérifie : $|D_n| = \binom{8}{n} \cdot \binom{24}{5-n}$.

On en déduit les probabilités de tirer exactement n coeurs (pour $n \in \{0,\dots,5\}$.

Pour la probabilité de tirer au moins 1 coeurs, on a deux méthodes. Notons D cet événement. On a alors :

– soit on utilise $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5$, et on a ainsi l'égalité $P(D) = P(D_1) + \cdots + P(D_5)$ (comme les événements D_n sont deux à deux disjoints) ;

– soit on utilise $\overline{D} = D_0$, et donc $P(D) = 1 - P(D_0)$.

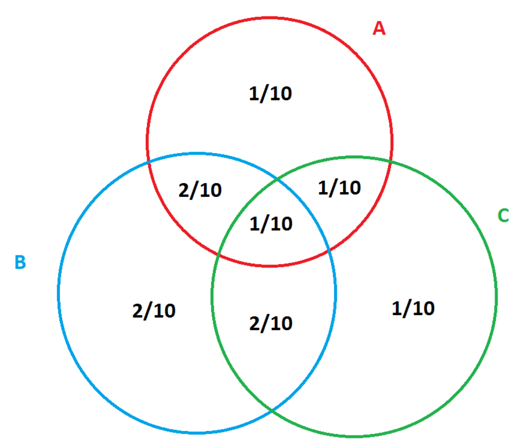
Dans les deux cas, on trouve : $P(D) = \frac{2837}{3596}$.

Exercice 2 : Considérons A_1, A_2 deux événements négligeables, et B_1, B_2 deux événements presque certains. On pose $A = A_1 \cup A_2$ et $B = B_1 \cap B_2$.

On a : $P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) + P(A_2) = 0 + 0 = 0$. Comme $P(A)$ doit être compris entre 0 et 1, alors nécessairement $P(A) = 0$, donc A est négligeable.

De même, on a : $P(B) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cup B_2) \geq P(B_1) + P(B_2) - 1 = 1$. Comme $P(B)$ doit être compris entre 0 et 1, alors nécessairement $P(B) = 1$, donc B est presque certain.

Exercice 3 : Il suffit ici de faire un dessin (avec des patates), puis d'interpréter les assertions logiques en assertions ensemblistes. On a la situation suivante :



On laisse toutes les fractions sur 10 pour que les calculs soient plus facile à suivre. L'idée fondamentale est que l'on peut sommer directement les probabilités dans une union dès lors que les événements sont deux à deux disjoints.

1. $P(A \cap B) = 3/10$.
2. $P(A \cap B \cap C) = 1/10$.
3. $P(A \cap B \setminus C) = 2/10$.
4. $P(A \setminus (B \cup C)) = 1/10$.
5. $P(A \cup B \cup C) = 10/10 = 1$.
6. $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 0$.
7. $P\left((A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B))\right) = 4/10$.

Exercice 4 : Le voyageur choisit au hasard son interlocuteur, il aura donc une chance sur trois de choisir A, B ou C.

1. Il faut raisonner en terme de probabilité conditionnelle. Notons A, B et C les événements associés au fait qu'il ait choisi A, B ou C pour demander son chemin. Notons D l'événement "on lui a dit le bon chemin". On a les probabilités conditionnelles :

$$P_A(D) = 3/5 \ , \ P_B(D) = 3/5 \ et \ P_C(D) = 4/5.$$

Ainsi, comme les événements A, B, C forment une partition de Ω, on en déduit :

$$P(D) = P(A) \cdot P_A(D) + P(B) \cdot P_B(D) + P(C) \cdot P_C(D) = 2/3.$$

2. Prenons par exemple le cas de A. On a : $P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$. Or, $P(A \cap D) = 1/5$ (il a une chance sur trois de choisir A, puis A a trois chances sur cinq de lui donner le bon chemin). Donc finalement : $P_D(A) = 3/10$.

En raisonnant de la même manière, on trouve : $P_D(B) = 3/10$ et $P_D(C) = 4/10$.

Exercice 5 :

1. Pour savoir si les événements A et B sont indépendants, il suffit de vérifier que $P(A) = P_B(A)$ (ou que $P(B) = P_A(B)$. Or, on a $P(A) = 0.75$, et $P_B(A) = 1 - P_B(\overline{A}) = 1 - 0.25 = 0.75$. Donc les événements A et B sont indépendants.

2. Il suffit ici de calculer $P_{\overline{B}}(\overline{A})$, c'est-à-dire $\frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{B})}$.

On a :

$$\begin{aligned} P(\overline{B} \cap \overline{A}) &= 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P_B(A) \cdot P(B) = 1 - P(A) - P(B) + (1 - P_B(\overline{A})) \cdot P(B) \\ &= 1 - 0.75 - 0.40 + 0.75 \cdot 0.40 = 0.15 \end{aligned}$$

donc : $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{0.15}{0.60} = 0.25 = P(\overline{A})$.

Exercice 6 : Posons p la probabilité pour une face impaire (de telle sorte que la probabilité pour une face paire est de $2p$). Comme la somme des probabilités doit faire 1, on en déduit que : $1 = p \cdot 3 + (2p) \cdot 3$ (où les 3 représentent le nombre de faces impaires puis le nombre de faces paires). C'est-à-dire finalement $1 = 9p$, donc $p = 1/9$.

Ainsi, chaque face impaire a une probabilité de $1/9$, et chaque face paire une probabilité de $2/9$.

Exercice 7 : Ce sont directement les cas du cours. On a alors :

1. $|\Omega| = A_n^k$.
2. $|\Omega| = n^k$
3. $|\Omega| = C_n^k$

Exercice 8 : Montrons par récurrence que cette probabilité vaut $1/2$. Pour cela, posons A_n l'événement "après n lancers, on a obtenu un nombre impair de fois Face".

Initialisation : si $n = 1$: on a une chance sur deux d'avoir Pile, et la même probabilité d'avoir Face. L'événement A_1 correspond au fait d'obtenir Pile, et donc $P(A_1) = 1/2$.

Hérédité : on suppose que, pour un certain $n \geq 1$, on ait $P(A_n) = 1/2$. Montrons alors que $P(A_{n+1}) = 1/2$. Pour cela, analysons l'événement A_{n+1}. On a deux possibilités pour les éléments de A_{n+1} :

– soit on a $n+1$ lancers de pièces, qui font un nombre de fois pair de Face sur les n premiers lancers puis qui font Pile.
– soit on a $n+1$ lancers de pièces, qui font un nombre de fois impair de Face sur les n premiers lancers puis qui font Face.

Comme la probabilité d'avoir Pile ou Face au dernier lancer est de $1/2$, on en déduit :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \cdot \frac{1}{2} + P(\overline{A_n}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

d'où la récurrence.