Corrigé de l'examen : probabilités discrètes et continues

Exercice 1 :

Petit préambule explicatif de la situation : L'abeille se pose sur des fleurs, et rentre à la ruche dans l'une des deux situations suivantes :

- elle se pose sur une fleur qu'elle avait déjà butinée ;
- elle s'est posée sur 5 fleurs différentes.

Ainsi, en représentant les fleurs par les entiers de 1 à N, les éléments de Ω sont une suite d'au plus 5 éléments, faite d'entiers entre 1 et N, de l'une des formes suivantes :

- soit il y d'abord des entiers deux-à-deux distincts (au plus au nombre de 4), puis un entier égal à l'un de ceux déjà choisis ;
- soit il y a cinq entiers deux-à-deux distincts.

La première situation correspond aux éléments de Ω_1, Ω_2, Ω_3 ou Ω_4. La seconde situation correspond aux éléments de Ω_5.

1. Les Ω_i constituent une partition de Ω. Il est évident de voir qu'ils sont deux-à-deux disjoints, et le préambule montre que la réunion des Ω_i vaut tout Ω.

On en déduit l'égalité des cardinaux suivante :

$$|\Omega| = \sum_{i=1}^{5} |\Omega_i|.$$

Il est facile de calculer les cardinaux des Ω_i, et on trouve :

$$\begin{aligned}
|\Omega_1| &= N \\
|\Omega_2| &= N \cdot (N-1) \cdot 2 \\
|\Omega_3| &= N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot 3 \\
|\Omega_4| &= N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot 4 \\
|\Omega_5| &= N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot (N-4)
\end{aligned}$$

Pour bien comprendre d'où viennent ces résultat, il suffit de voir le nombre de choix pour chacun des entiers dans l'écriture précédentes de Ω_i. Par exemple, pour Ω_3, on a :

- N choix différents pour i ;
- $N-1$ choix différents pour j ;
- $N-2$ choix différents pour k ;
- 3 choix différents pour l.

On en déduit finalement la formule suivante (après avoir développé) :

$$|\Omega| = n^5 - 6 \cdot n^4 + 14 \cdot n^3 - 13 \cdot n^2 + 5 \cdot n$$

2. Suivant le protocole expliqué, une abeille se pose sur un nombre de fleurs allant de 1 à 5. On en déduit : $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Pour calculer la loi de probabilité, donnons-nous $1 \leq k \leq 5$ et intéressons-nous à l'événement $X = k$. Ceci revient à ce que l'abeille se pose dans un premier temps sur $k-1$ fleurs deux-à-deux distinctes, puis sur une fleur qu'elle a déjà butinée (si $k \neq 5$), ou alors qu'elle se pose sur 5 fleurs deux-à-deux distinctes (si $k = 5$). On voit assez facilement qu'on a deux situations :

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{|\Omega_k|}{N^{k+1}} & si \quad k \neq 5 \\ \frac{|\Omega_5|}{N^5} & si \quad k = 5 \end{cases}$$

Comme précédemment, on peut expliquer plus en détail le cas $k = 3$. On veut donc que l'abeille se pose sur 3 fleurs deux-à-deux distinctes, puis sur l'une des trois premières fleurs qu'elle a butinée. On a donc :

- une probabilité de $\frac{N}{N} = 1$ pour la première fleur (elle peut se poser sur les N fleurs accessibles) ;
- une probabilité de $\frac{N-1}{N}$ qu'elle se pose ensuite sur une fleur qu'elle n'a pas encore butinée (il reste $N-1$ fleurs à butiner, et il y a N fleurs en tout) ;
- une probabilité de $\frac{N-2}{N}$ qu'elle se pose ensuite sur une fleur qu'elle n'a pas encore butinée (il reste $N-2$ fleurs à butiner, et il y a N fleurs en tout) ;
- une probabilité de $\frac{3}{N}$ qu'elle se pose sur une fleur qu'elle a déjà butinée (elle en a butiné 3 et il y a N fleurs en tout).

Et finalement on trouve :

$$P(X = 3) = \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot 3}{N^4}$$

qui est bien le résultat qu'on avait énoncé.

Au passage, on peut vérifier que $\sum_{k=1}^{5} P(X = k)$ est bien égal à 1 (ce qui est bien le cas).

Quand N tend vers l'infini, l'équivalent de cette loi est donné par :

$$P(X = k) \sim \begin{cases} \frac{k}{N} & si \quad k \neq 5 \\ 1 & si \quad k = 5 \end{cases}$$

3. La fonction de répartition commence à 0 en $-\infty$, puis comporte des sauts en chacun des k, d'une hauteur de $P(X = k)$. Dans les deux situations qui nous intéressent, on trouve les valeurs suivantes :

	$N=5$	$N=\infty$
$P(X=1)$	$\frac{1}{5}=0.2$	0
$P(X=2)$	$\frac{8}{25}=0.32$	0
$P(X=3)$	$\frac{36}{125}=0.288$	0
$P(X=4)$	$\frac{96}{625}=0.1536$	0
$P(X=5)$	$\frac{24}{625}=0.0384$	1

On trouve alors les deux graphes suivants pour les fonctions de répartitions (selon que $N=5$ ou que $N=\infty$) :

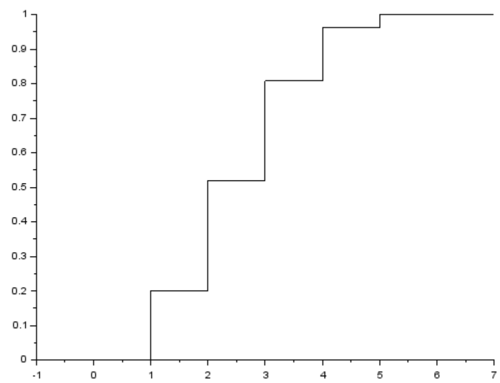

TABLE 1 – Fonction de répartition si $N=5$

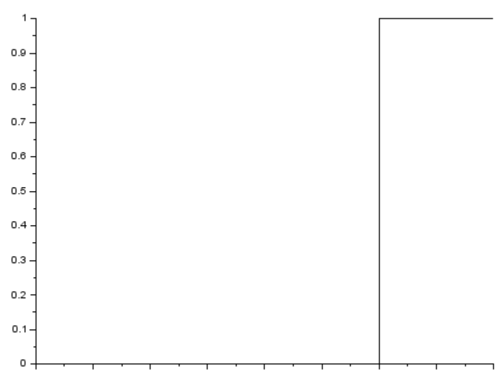

TABLE 2 – Fonction de répartition si $N=\infty$

Exercice 2 :
1. On suppose que X suit une loi uniforme sur $[0;16]$. Il suffit directement d'appliquer le cours. Sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{16} 1_{[0;16]}(t)$$

et la fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{x}{16} & si \quad 0 \leq x \leq 16 \\ 1 & si \quad x \geq 16 \end{cases}.$$

Le tracer de sa fonction de répartition est donné par :

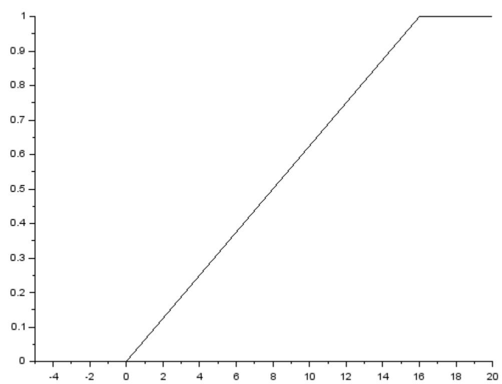

Table 3 – Fonction de répartition de X

2. On considère Y la hauteur à laquelle le pissenlit atterrit. La valeur de Y dépend directement de la valeur de X suivant :

$$Y = \begin{cases} 10 - \frac{X}{4} & \text{si} \quad X \in [0;8] \\ 16 - X & \text{si} \quad X \in [8;16] \end{cases}$$

Inversement, on peut exprimer X en fonction de Y. En faisant le calcul (ou en s'aidant simplement du dessin), on a les équivalences suivantes :

$$Y \in [0;8] \Leftrightarrow X \in [8;16]$$

$$Y \in [8;10] \Leftrightarrow X \in [0;8]$$

Et on déduit alors :

$$X = \begin{cases} 40 - 4Y & \text{si} \quad Y \in [8;10] \\ 16 - Y & \text{si} \quad Y \in [0;8] \end{cases}$$

Il est alors facile d'exprimer la probabilité de l'événement $Y \leq y$, ce qui se fait suivant la valeur de y comme suit :

$$P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & si \quad y \leq 0 \\ P(X \geq 16 - y) = \frac{y}{16} & si \quad y \in [0; 8] \\ P(X \geq 40 - 4y) = \frac{4y-24}{16} & si \quad y \in [8; 10] \\ 1 & si \quad y \geq 10 \end{cases}$$

On vérifie au passage que cette fonction est bien continue (pour la cohérence des questions suivantes). La continuité est uniquement à regarder en 0, 8 et 10 (et est bien vérifiée).

Le tracer de la fonction de répartition est le suivant :

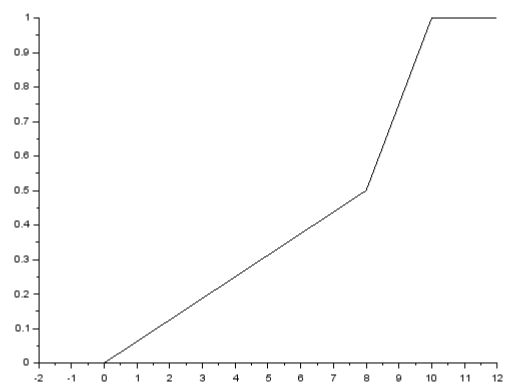

TABLE 4 – Fonction de répartition de Y

3. Calculons la dérivée de la fonction de répartition de Y. Cette fonction est bien dérivable, sauf en 0, 8 et 10. Si on note g cette dérivée, on a :

$$g(y) = \begin{cases} 0 & si \quad y < 0 \\ \frac{1}{16} & si \quad y \in]0; 8[\\ \frac{1}{4} & si \quad y \in]8; 10[\\ 0 & si \quad y > 10 \end{cases}$$

Il est alors immédiat que g est positive, et que son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut : $1/2 + 1/2 = 1$. C'est donc bien une densité.

On peut évidemment tracer cette densité, et on obtient :

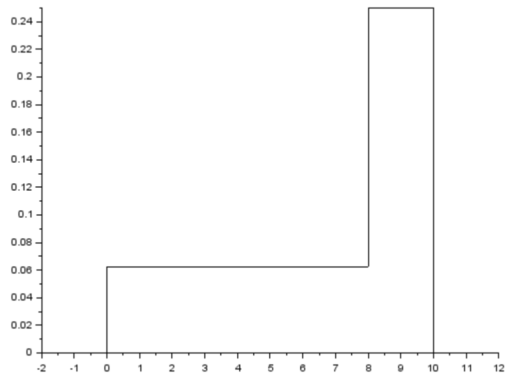

TABLE 5 – Densité de Y