Examen : probabilités discrètes et continues

Exercice 1 : On s'intéresse à la pollinisation de plantes par des abeilles, et on regarde plus particulièrement le mouvement d'une seule abeille. On suppose que celle-ci procède de la manière suivante :

- elle vole aléatoirement parmi N fleurs ;
- elle se pose sur une première fleur, puis va de fleur en fleur pour butiner, en se posant éventuellement deux fois de suite sur une même fleur ;
- elle rentre à la ruche dans l'une des deux situations suivantes : soit lorsqu'elle se pose sur une fleur qu'elle avait déjà butinée, soit parce qu'elle s'est posée sur 5 fleurs différentes.

On pose X, à $N \in \mathbb{N}$ donné, la variable aléatoire du nombre de fleurs sur lesquelles l'abeille s'est posée. Pour simplifier les notations, on verra simplement les fleurs comme des nombres allant de 1 à N

1. On considère les ensembles :
   - $\Omega_1 = \{(i,i),\ 1 \leq i \leq N\}$;
   - $\Omega_2 = \{(i,j,k),\ 1 \leq i \neq j \leq N \text{ et } k \in \{i,j\}\}$;
   - $\Omega_3 = \{(i,j,k,l),\ 1 \leq i \neq j \neq k \leq N \text{ et } l \in \{i,j,k\}\}$;
   - $\Omega_4 = \{(i,j,k,l,m),\ 1 \leq i \neq j \neq k \neq l \leq N \text{ et } m \in \{i,j,k,l\}\}$;
   - $\Omega_5 = \{(i,j,k,l,m),\ 1 \leq i \neq j \neq k \neq l \neq m \leq N\}$.

   Quel rôle joue la famille (Ω_i) par rapport à Ω ? En déduire le cardinal de Ω.

2. Donner l'ensemble $X(\Omega)$, puis calculer la loi de X. Donner un équivalent de cette loi pour N tendant vers $+\infty$. Pour cela, on prendra garde au fait que les éléments de Ω (vus comme des éléments des Ω_i) ne sont pas équiprobables.

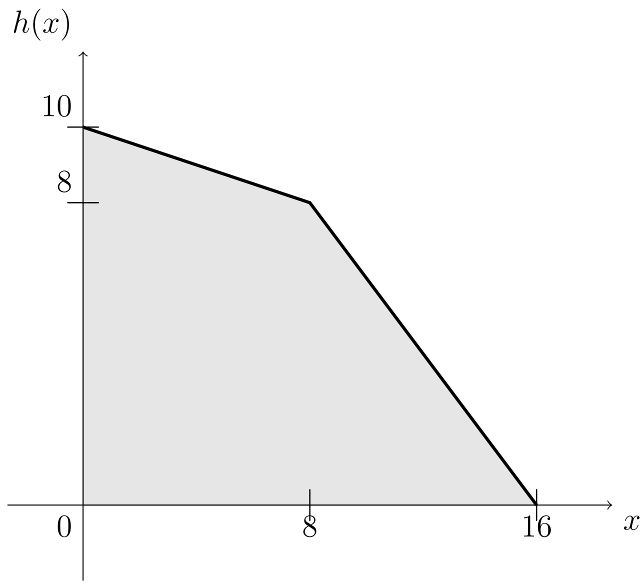
   Lorsque l'on étudie l'événement $X = k$, il pourra être intéressant de voir la probabilité qu'a une abeille de se poser successivement sur $k-1$ fleurs deux à deux distinctes.

3. Calculer puis tracer la fonction de répartition de X dans le cas où $N = 5$.

Exercice 2 : On considère la prolifération de pissenlits. Pour cela, on suppose qu'il y a un parterre de pissenlits en haut d'une falaise, sur laquelle souffle du vent. La position du point de chute d'un akène de pissenlit (c'est-à-dire de graine de pissenlit) par rapport au sol est une variable aléatoire notée X.

En bas de la falaise se trouve un plateau, dont la hauteur en fonction de la position x au sol est donnée par la fonction h tracée ci dessous, et définie sur $[0;16]$ par :

$$h(x) = \begin{cases} 10 - \frac{x}{4} & \text{sur} \quad [0;8] \\ 16 - x & \text{sur} \quad [8;16] \end{cases}$$



1. On suppose que X suit une loi uniforme sur $[0;8]$. Donner la densité de probabilité de X, puis calculer et tracer sa fonction de répartition.

2. On note Y la variable aléatoire de la hauteur sur le plateau à laquelle le pissenlit atterrit (c'est-à-dire $Y = h(Y)$). Calculer puis tracer la fonction de répartition de Y. On pourra pour cela distinguer l'étude de $P(Y \leq y)$ selon que y est dans l'un des ensembles suivants : $]-\infty;0]$, $[0;8]$, $[0;16]$ et $[16;+\infty[$.

3. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité, et donner sa densité de probabilité. On pourra prendre un choix arbitraire de valeur pour la densité de Y en les points : 0, 8 et 16.