Corrigé du DM2 : probabilités discrètes et continues

Exercice 1 : Probabilités discrètes sur un ensemble infini

1. Les enfants d'une famille sont :

– soit une série d'au plus $n-1$ filles, et un garçon ;

– soit n filles.

On a donc :

$$\Omega = \{G, FG, FFG, \ldots, F\ldots FG \text{ avec } n-1 \text{ fois } F, F\ldots F \text{ avec } n \text{ fois } F\}.$$

2. Suivant la description précédente de Ω, il est immédiat que : $X_n(\Omega) = \{0,1\}$ et que $Y_n(\Omega) = \{0,1,2,\ldots,n\}$.

Pour la loi de X_n : on a 1 ou 0 garçon, et la seule configuration où l'on n'a aucun garçon est lorsque l'on a n filles d'affilée.

On déduit ainsi :
$$\left\{\begin{array}{lcl} P(X_n=0) & = & \frac{1}{2^n} \\ P(X_n=1) & = & 1-\frac{1}{2^n} \end{array}\right. .$$

Pour la loi de Y_n : si l'on se donne $i \leq n-1$, alors on a i filles si, et seulement si, on a i filles puis un garçon. Et on a n filles si, et seulement si, on a n filles d'affilée (c'est-à-dire si l'on n'a aucun garçon).

On déduit ainsi :

$$\left\{\begin{array}{lcll} P(Y_n=i) & = & \frac{1}{2^{i+1}} & \text{pour } 0 \leq i \leq n-1 \\ P(Y_n=n) & = & \frac{1}{2^n} & \end{array}\right. .$$

Au passage, la loi de Y_n permet aussi de retrouver la loi de X_n grâce à l'équivalence :

$$Y_n \leq n-1 \Leftrightarrow X_n = 1$$

et on a bien l'égalité :

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(Y_n=i) = 1 - \frac{1}{2^n} = P(X_n=1).$$

3. Calculons les espérances de X_n et Y_n :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{E}(X_n) & = & 0 \cdot P(X_n = 0) + 1 \cdot P(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{2^n} \\ \\ \mathrm{E}(Y_n) & = & \sum_{i=0}^{n} i \cdot P(Y_n = i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{2^{i+1}} + \frac{n}{2^n} \\ & = & \frac{1}{2}\left(2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}\right) + \frac{n}{2^n} \\ & = & 1 - \frac{1}{2^n} \end{array}$$

et on a ainsi $\mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}(Y_n)$, donc cette politique n'a pas d'incidence sur la parité homme-femme dans la population.

4. On a cette fois-ci : $\Omega = \{F \ldots FG \text{avec } n \text{ fois } F, \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$, qui est donc infini.
Et $X(\Omega) = \{1\}$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Les lois de X et Y sont données par :

$$P(X = 1) = 1 \qquad et \qquad P(Y = i) = \frac{1}{2^{i+1}}.$$

On déduit alors les espérances :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{E}(X) & = & 1 \cdot P(X = 1) = 1 \\ \\ \mathrm{E}(Y) & = & \sum_{i=0}^{+\infty} i \cdot P(Y_n = i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{2^{i+1}} \\ & = & \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \end{array}$$

et on a bien : $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}(X)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n) = \mathrm{E}(Y)$.

On a aussi $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y)$, donc cette politique n'a pas non plus d'influence sur la partié homme-femme dans la population.

5. La variable aléatoire X est une variable aléatoire discrète uniforme sur un ensemble à un élément (à savoir $\{1\}$), tandis que la variable aléatoire Y se comporte comme une variable aléatoire géométrique de raison $1/2$.

Exercice 2 : Variables aléatoires réelles ni discrètes, ni à densité

1. On suppose que X suit une loi uniforme sur $[0; 16]$. Sa densité de probabilité f est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{16} 1_{[0;16]}(t)$$

et sa fonction de répartition F_X est donnée par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & si & x \leq 0 \\ \frac{x}{16} & si & 0 \leq x \leq 16 \\ 1 & si & x \geq 16 \end{array} \right. .$$

2. On définit la variable aléatoire Y par :

$$Y = h(X) = \left\{ \begin{array}{ccc} 8 & si & X \in [0; 8] \\ 16 - X & si & X \in [8; 16] \end{array} \right. .$$

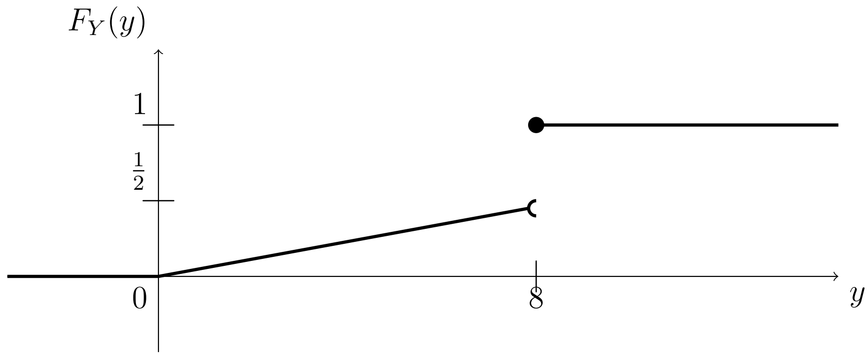
On souhaite calculer la fonction de répartition de Y, c'est-à-dire la probabilité de l'événement $Y \leq y$ (pour $y \in \mathbb{R}$). On a trois situations :

– si $y < 0$: alors $P(Y \leq y) = 0$ (comme Y prend ses valeurs dans $[0;8]$) ;

– si $0 \leq y < 8$: alors $P(Y \leq y) = P(X \geq 16 - y)$ (il suffit de faire un dessin). En effet, les événements $Y \leq y$ et $X \geq 16 - y$ sont les mêmes, d'après la définition de Y et celle de la focntion h.

– si $y \geq 8$: alors $P(Y \leq y) = 1$ (comme Y prend ses valeurs dans $[0;8]$).

Le tracer de la fonction de répartition F_Y est alors :



3. Il est alors facile de voir que Y n'est ni discrète, ni à densité :

– Y n'est pas discrète car $Y(\Omega) = [0;8]$ n'est pas un ensemble discret. On peut aussi dire que, là où la fonction F_Y est dérivable, sa dérivée n'est pas toujours nulle (par exemple en 4) ;

– Y n'est pas à densité car sa fonction de répartition F_Y n'est pas continue.