DM2 : probabilités discrètes et continues

Exercice 1 : Probabilités discrètes sur un ensemble infini

On s'intéresse à la politique nataliste chinoise qui consiste à limiter à 1 le nombre d'enfants d'une famille, dès lors que cet enfant est un garçon. On suppose qu'une famille continuera d'avoir des enfants jusqu'à avoir un garçon, avec un maximum de n enfants.

1. Décrire l'ensemble Ω des enfants (différenciés par sexe) que peut avoir une famille.

2. On note X_n la variable aléatoire du nombre de garçons obtenus, et Y_n celle du nombre de filles obtenues. Donner $X_n(\Omega)$ et $Y_n(\Omega)$.

3. Calculer l'espérance de X_n et de Y_n. Qu'est-ce que cela traduit sur l'incidence de cette politique nataliste sur la parité homme-femme dans la population.

4. On suppose désormais que le nombre d'enfant n'est plus majoré, c'est-à-dire que les familles continuent à avoir des enfants jusqu'à avoir un garçon. On note X et Y les variables aléatoires associées (qui sont en fait les limites des variables aléatoires X_n et Y_n). Calculer l'espérance de X et de Y (qui sont des séries infinies, qu'on calculera sans chercher à justifier leurs convergences). Et retrouver les résultats suivants :

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X) \qquad et \qquad \lim_{n\to\infty} E(Y_n) = E(Y).$$

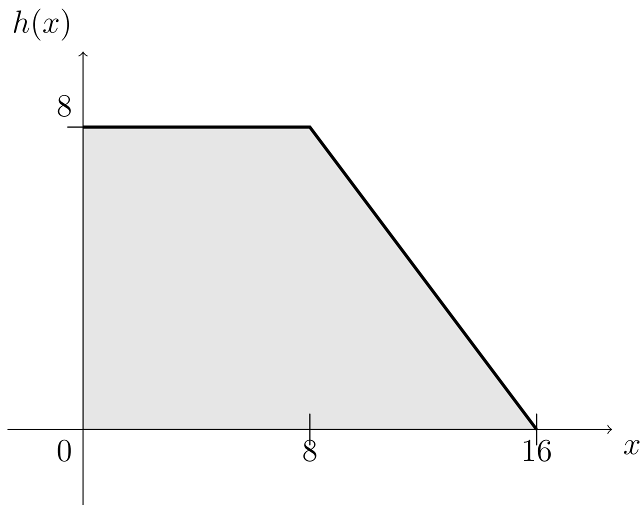
5. Donner la "loi usuelle" qui caractérisent le mieux les variables aléatoires X et Y, et donner l'incidence de cette seconde politique nataliste sur la parité homme-femme dans la population.

Exercice 2 : Variables aléatoires réelles ni discrètes, ni à densité

On considère (encore!) la prolifération de pissenlits. Pour cela, on suppose qu'il y a un parterre de pissenlits en haut d'une falaise, sur laquelle souffle du vent. La position du point de chute du pissenlit par rapport au sol est une variable aléatoire notée X.

En bas de la falaise se trouve un plateau, dont la hauteur en fonction de la position x au sol est donnée par la fonction h tracée ci dessous, et définie sur $[0;16]$ par :

$$h(x) = \begin{cases} 8 & \text{sur} \quad [0;8] \\ 16-x & \text{sur} \quad [8;16] \end{cases}$$



1. On suppose que X suit une loi uniforme sur $[0; 16]$. Donner la densité de probabilité de X, puis calculer et tracer sa fonction de répartition.

2. On note Y la variable aléatoire de la hauteur sur le plateau à laquelle le pissenlit atterrit (c'est-à-dire $Y = h(X)$). Calculer puis tracer la fonction de répartition de Y. On pourra pour cela distinguer l'étude de $P(Y \leq y)$ selon que $y < 8$ ou $y \geq 8$.

3. En déduire que Y n'est pas une variable aléatoire à densité, et n'est pas non plus une variable aléatoire discrète. On se contentera de donner une condition que devrait vérifier Y s'il était à densité ou discrète.