Corrigé du DM1 : probabilités discrètes et continues

Exercice 1 : On numérote les boules noires de 1 à 2, et les boules blanches de 1 à 8.

1. a. Les tirages sont de trois formes possibles :

- deux boules noires : $\{N1, N2\}$, et donc une seule possibilité ;
- une boule noire et une boule blanche : $\{Ni, Bj\}$, pour $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 8$, c'est-à-dire $2 \times 8 = 16$ tirages possibles ;
- deux boules blanches : $\{Bi, Bj\}$, pour $1 \leq i \neq j \leq 8$, c'est-à-dire $C_8^2 = 28$ tirages possibles.

Et un nombre total de tirages de $1 + 16 + 28 = 45$ possibilités. On peut évidemment retrouver ce résultat en disant que l'on tire simultanément deux boules parmi 10, soit un nombre total de tirages qui est de $C_{10}^2 = 45$. On trouve bien sûr la même chose.

La loi de la variable aléatoire X se déduit directement des trois cas analysés dans la première méthode. On a :

- $P(X = 2) = \frac{1}{45}$;
- $P(X = 1) = \frac{16}{45}$;
- $P(X = 0) = \frac{28}{45}$.

b. L'espérance et la variance de X sont données par :

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{45} + 1 \cdot \frac{16}{45} + 0 \cdot \frac{28}{45} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

$$E(X^2) = 4 \cdot \frac{1}{45} + 1 \cdot \frac{16}{45} + 0 \cdot \frac{28}{45} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{4}{9} - \frac{4}{25} = \frac{64}{225}$$

c. L'événement $X \geq 1$ est le complémentaire de l'événement $X = 0$ (comme X prend les valeurs $0, 1, 2$). Ainsi, on a :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = \frac{17}{45}.$$

2.a. On autorise cette fois-ci les remises. Les tirages sont cette fois-ci de quatre formes, qui sont :

- deux boules noires : (Ni, Nj), pour $1 \leq i, j \leq 2$, et donc $2 \times 2 = 4$ possibilités ;
- une boule noire **puis** une boule blanche : (Ni, Bj), pour $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 8$, c'est-à-dire $2 \times 8 = 16$ tirages possibles ;

- une boule blanche **puis** une boule noire : (Bj, Ni), pour $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 8$, c'est-à-dire $8 \times 2 = 16$ tirages possibles ;
- deux boules blanches : $\{Bi, Bj\}$, pour $1 \leq i, j \leq 8$, c'est-à-dire $8 \times 8 = 64$ tirages possibles.

Et un nombre total de tirages de $4 + 16 + 16 + 64 = 100$ possibilités. Là encore, on peut évidemment retrouver ce résultat en disant que l'on tire successivement avec remise deux boules parmi 10, soit un nombre total de tirages qui est de $10^2 = 100$. On trouve bien sûr la même chose.

La loi de la variable aléatoire Y se déduit directement des trois cas analysés dans la première méthode. On a :

- $P(Y = 2) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$;
- $P(Y = 1) = \frac{16+16}{100} = \frac{8}{25}$;
- $P(Y = 0) = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$.

b. L'espérance et la variance de Y sont données par :

$$E(Y) = 2 \cdot \frac{1}{25} + 1 \cdot \frac{8}{25} + 0 \cdot \frac{16}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

$$E(Y^2) = 4 \cdot \frac{1}{25} + 1 \cdot \frac{8}{25} + 0 \cdot \frac{16}{25} = \frac{12}{25}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{12}{25} - \frac{4}{25} = \frac{8}{25}$$

c. L'événement $Y \geq 1$ est le complémentaire de l'événement $Y = 0$ (comme Y prend les valeurs $0, 1, 2$). Ainsi, on a :

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = \frac{9}{25}.$$

3. a. Pour cette partie, il est plus facile de calculer directement la loi de probabilité de Z. On s'intéresse à l'événement $Z = k$. Celui-ci consiste en le fait de :

- tirer successivement et sans remise $k - 1$ boules blanches ;
- tirer une boule noire.

La probabilité de tirer les $k - 1$ boules blanches est de :

$$p_k = \frac{A_8^{k-1}}{A_{10}^{k-1}} = \frac{8 \cdot \dots \cdot (8 - k + 2)}{10 \cdot \dots \cdot (10 - k + 2)}$$

(il suffit juste de regarder, parmi les tirages successives sans remise de k boules parmi 10 boules, ceux qui ne contiennent que les boules blanches, qui sont au nombre de 8)

et la probabilité de tirer ensuite une des deux boules noire, après avoir tiré les $k - 1$ boules blanches, est de :

$$q_k = \frac{2}{10 - k + 1}$$

soit finalement une loi donnée par :

$$P(Z=k) = p_k \cdot q_k = \frac{8 \cdot \dots \cdot (8-k+2)}{10 \cdot \dots \cdot (10-k+2)} \cdot \frac{2}{10-k+1}.$$

On donne les valeurs que l'on trouve (pour $Z \in \{1, \dots, 9\}$, qui sont les seules valeurs possibles) :

- $P(Z=1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$;
- $P(Z=2) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$;
- $P(Z=3) = \frac{8\times 7}{10\times 9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{7}{45}$;
- $P(Z=4) = \frac{2}{15}$;
- $P(Z=5) = \frac{1}{9}$;
- $P(Z=6) = \frac{4}{45}$;
- $P(Z=7) = \frac{1}{15}$;
- $P(Z=8) = \frac{2}{45}$;
- $P(Z=9) = \frac{1}{45}$.

Et on retrouve bien 1 en sommant toutes ces probabilités.

b. L'espérance et la variance de Z sont données par :

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{9} k \cdot P(Z=k) = \frac{11}{3}$$

$$E(Z^2) = \sum_{k=1}^{9} k^2 \cdot P(Z=k) = \frac{55}{3}$$

$$\mathrm{Var}(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{55}{3} - \frac{121}{9} = \frac{44}{9}$$

c. Là encore il est plus facile de raisonner en terme d'éléments complémentaires. L'événement $Z \geq 3$ est le complémentaire de l'événement $Z \leq 2$ (comme Z prend les valeurs $1, \dots, 9$). Et l'événement $Z \leq 2$ n'est autre que la réunion des événements disjoints $Z = 1$ et $Z = 2$. Ainsi, on a :

$$P(Z \geq 3) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - (P(Z=1) + P(Z=2)) = \frac{28}{45}.$$

Exercice 2 :

1. Comme f est une densité, elle doit vérifier les deux conditions suivantes : $f \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t = 1$. La première condition est équivalente à $a \geq 0$. Pour la seconde, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} a \cdot (1-t^2)\mathrm{d}t = \left[a \cdot \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \right]_{-1}^{1}$$
$$= a \cdot (1 - \frac{1}{3}) - a \cdot (-1 + \frac{1}{3}) = a \cdot \frac{4}{3}$$

Finalement, on déduit que $a = \frac{3}{4}$.

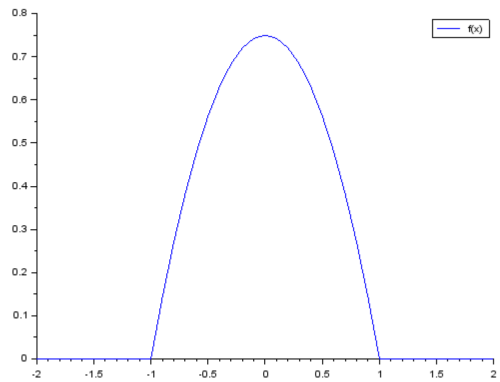

Table 1 – Graphe de la fonction f

2. La fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad]-\infty;-1] \\ \frac{-x^3+3x+2}{4} & \text{sur} \quad [-1;1] \\ 1 & \text{sur} \quad [1;+\infty[\end{cases}$$

et on vérifie au passage que la fonction F_X est bien continue : pour cela, il suffit de vérifier que $\frac{-x^3+3x+2}{4}$ vaut 0 en $x = -1$, et 1 en $x = 1$.

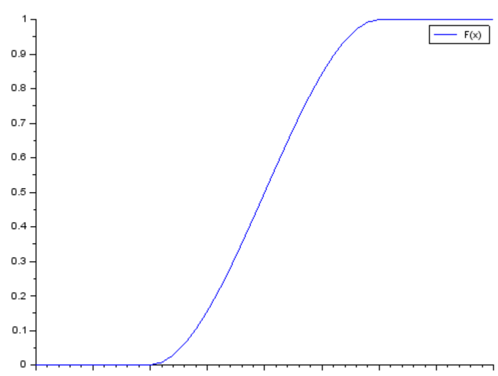

Table 2 – Graphe de la fonction F_X

3. Comme on a une variable aléatoire à densité, on pourra remplacer, quand cela nous arrange, les inégalités strictes par des inégalités larges, et réciproquement. Ainsi, on a :

– $P(X < 0) = P(X \leq 0) = F_X(0) = \frac{1}{2}$;

- $P(X \geq 0.5) = 1 - P(X < 0.5) = 1 - P(X \leq 0.5) = 1 - F_X(0.5) = \frac{5}{32}$;
- $P(|X| \leq 0.5) = P(-0.5 \leq X \leq 0.5) = P(-0.5 < X \leq 0.5) = P(X \leq 0.5) - P(X \leq -0.5) = F_X(0.5) - F_X(-0.5) = \frac{11}{16}$.

Notons au passage que, la fonction f est paire, donc la fonction F_X possède la symétrie suivante : $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$. Ce résultat se voit notamment dans le deuxième cas, où on a : $F_X(-0.5) = \frac{5}{32} = 1 - F_X(0.5)$.

4. On applique directement les formules du cours :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(t - t^3)\mathrm{d}t = 0.$$

Ici, on peut soit calculer explicitement cette intégrale (en donnant une primitive de $t - t^3$), soit voir que l'on intègre sur $[-1;1]$ une fonction impaire, donc cette intégrale est nécessairement nulle.

On trouve aussi :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(t^2 - t^4)\mathrm{d}t = \frac{1}{5}$$

et finalement :

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{5}.$$