Feuille 5 : Séries de fonctions

Exercice 1 1. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout n entier : $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge simplement $\mathbb{R}$ et que sa somme est une fonction continue.

2. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout n entier : $g_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}$. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa somme est une fonction continue.
3. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout n entier : $h_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$. Soient N un entier et x un réel. Majorer $\left|\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} h_n(x)\right|$ En déduire que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ converge simplement $\mathbb{R}$ et que sa somme est une fonction continue. Est-elle normalement convergente ?
4. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout n entier : $k_n(x) = \dfrac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} k_n(x)$. La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} k_n$ est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$? Sur les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$?
5. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geqslant 1$: $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{n}$.
   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est normalement convergente sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$ et que sa somme f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer pour tout n entier supérieur ou égal 1 l'inégalité :
   $$\int_n^{n+1} \frac{dt}{x^2+t^2} \leqslant \frac{1}{x^2+n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{x^2+t^2}.$$
   (c) En déduire pour $N \geqslant 1$ un encadrement de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ et la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
6. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout n entier : $u_n(x) = ne^{-nx}$.
   (a) Montrer que la série de fonctions $u = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est normalement convergente sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Donner une primitive de u_n. En déduire une expression simple de $u(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 1. On rappelle que pour tout u nombre réel : $\operatorname{ch} u = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$.

   (a) Etablir la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sin x)^2}{\operatorname{ch} nx}$.
   (b) Montrer que la convergence est uniforme sur toute partie de la forme $\mathbb{R} - [-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$. Que pouvez-vous en déduire pour f ?

2. Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. La convergence est elle normale ?

3. On pose pour tout x nombre réel et tout entier $n \geqslant 2$: $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+(-1)^n n}$.

   (a) Etudier la convergence simple de $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} f_n$.

   (b) Montrer que la convergence de cette série est normale sur tous les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, puis qu'elle est uniforme mais non normale sur $\mathbb{R}_+$.

4. On pose pour tout x nombre réel et tout entier n : $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

   (a) Etudier la convergence simple de $f = \displaystyle\sum_{0}^{\infty} f_n$.

   (b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geqslant 1$ entier : $u_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$ et normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[0, r]$ où $r \in \mathbb{R}_+$. En déduire que la fonction $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

2. Soit $p \geqslant 1$ un entier. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $R_p(x) = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n(x)$. Etablir, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, les inégalités :

$$R_p(x) \geqslant \sum_{n=p+1}^{2p} u_n(x) \geqslant \frac{px}{x^2+4p^2}.$$

   En déduire un minorant de $R_p(p)$, puis que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

3. (a) Montrer pour tout n entier supérieur ou égal 1 l'inégalité :

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2+t^2} dt \leqslant \frac{x}{x^2+n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{x}{x^2+t^2} dt.$$

   (b) En déduire pour $N \geqslant 1$ un encadrement de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n(x)$ et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ lorsque x tend vers l'infini.

Exercice 4 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

2. (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)dt$ est convergente.

   (b) Soit $N \geqslant 1$ un entier et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $f(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} f_n(x) \geqslant 0$

   (c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(t)dt$ et la formule : $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t^2}{e^t-1} dt = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.