

Feuille 3 : Intégrales généralisées

Exercice 1 Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

a) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ b) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - 2}{x^3 \sqrt{x^2 + x}} dx$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ d) $\int_0^1 \ln(\sin x) dx$ e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$
 f) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)} dx$ g) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\ln x} dx$ h) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sin x + x\sqrt{x}}$ k) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + \sqrt{x})}$
 i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$ j) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ k) $\int_0^{+\infty} (\sqrt{x + \sin x} - \sqrt{x}) dx$ l) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(e^x - 1)}$

Exercice 2 Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)} dx$ converge et que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)} dx = 0$.

Exercice 3 Montrer que $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ est convergente pour tout n et donner sa valeur.

Exercice 4 Pour quelles valeurs de a et $b \in \mathbb{R}$ les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a(1+x^b)}$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a(1+x^b)} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^a)}{x^b} dx$ sont elles convergentes ?

Exercice 5 1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx$ est elle convergente ?

2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ est convergente et que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 6 1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer, en intégrant par parties, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx$ est convergente.

2. Démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx$ est convergente.

3. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \cos(e^x) dx$ est elle convergente ?

Exercice 7 Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ converge elle aussi.

Exercice 8 Soit $C_0(\mathbb{R}_+)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbb{R}_+ tendant vers 0 l'infini. Soit $H = \{f \in C_0(\mathbb{R}_+); \int_0^{+\infty} f^2(x) dx \text{ est convergente}\}$. Montrer que H est un sous espace vectoriel de $C_0(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 9 Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \cos x} dx$ sont convergentes.