Analyse PMCP. Feuille d'exercices 2

Exercice 1

Suites équivalentes.

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement positive et décroissante. Peut-on en dire autant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? On pourra considérer la suite $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$.
2. On pose
$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad ; \quad v_n = 1 \quad ;$$
$$u'_n = -1 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \quad ; \quad v'_n = -1 - \frac{2}{\sqrt{n}}.$$
Montrer que $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$. Que peut-on dire des suites $(u_n + u'_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n + v'_n)_{n\geqslant 1}$?
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives, équivalents, telles que $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ou $\alpha = +\infty$. Discuter suivant les valeurs de α si l'on peut dire que $\ln u_n \sim \ln v_n$.

Séries télescopiques. Pour chacune des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ci-dessous, trouver une expression simplifiée de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ associée à la série de terme général u_n. Conclure quant à la nature de la série.

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad ; \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad ;$$
$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad ; \quad u_n = \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right).$$

Comparaison avec une intégrale. On étudie la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$, avec α paramètre fixé dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. On note f_α la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f_\alpha(t) = \frac{1}{t\,(\ln t)^\alpha}$. Faire une étude rapide de cette fonction, et en dessiner le graphe.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $t \in [n, n+1]$, on a $u_n \geqslant f_\alpha(t) \geqslant u_{n+1}$. En déduire un encadrement de la somme partielle
$$S_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$
par deux intégrales de f_α sur des intervalles adéquats pour $n \geqslant 3$.
3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$?

L'espace de Hilbert. On note E l'espace vectoriel des suites réelles tendant vers 0, et F le sous ensemble de E formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_n u_n^2$ converge. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E.

Divers critères. Déterminer la nature de la série de terme général $(u_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque :

$$
\begin{array}{lll}
u_n = n\,\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) & ; & u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1 - \dfrac{1}{n} \quad ; \\
u_n = \ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right) & ; & u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^4+n+1} \quad ; \\
u_n = e^{\cos\frac{1}{n}} & ; & u_n = \dfrac{2^n+3^n+n^4}{n5^n+7n^7+2} \quad ; \\
u_n = \dfrac{(n!)^2}{2n!} & ; & u_n = \dfrac{1}{n^2\cos\frac{1}{n}} \quad ; \\
u_n = \dfrac{1}{n^2\ln n} & ; & \dfrac{a^n}{(1+a^n)^2} \quad \text{avec } a\in\mathbb{R}_+^* \\
u_n = \dfrac{n!}{\alpha^n} \quad \text{avec } \alpha>0 & ; & u_n = n^{-\ln n} \quad ; \\
u_n = \dfrac{1}{n!} & ; & u_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n \quad ; \\
u_n = \dfrac{n!}{n^n} & ; & u_n = e^{-\sqrt{n}} \quad ; \\
u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} & ; & u_n = \dfrac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}} \quad ; \\
u_n = \dfrac{(-1)^n\ln n}{n^2} & ; & u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad ;
\end{array}
$$

Séries alternées.

1. Soit $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. Donner une valeur approchée de S, en garantissant une erreur inférieure ou égale à 10^{-3}.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels. Montrer que si la série de terme général u_n est absolument convergente, alors la série de terme général $(u_n)^2$ converge. Donner un exemple de série $\sum_n u_n$ convergente, mais telle que la série $\sum_n (u_n)^2$ diverge.
3. Soient $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$ and $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
   (a) Vérifier que $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$, et que la série de terme général v_n converge.
   (b) Que peut-on en déduire de la série de terme général u_n ?
   (c) Étudier la nature de la série de terme général $u_n - v_n$, et en déduire celle de la série de terme général u_n.
   (d) Etudier la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$ en fonction de $\alpha>0$.
4. On se propose d'étudier la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.
   (a) Peut-on lui appliquer le théorème concernant les séries alternées ?
   (b) Soit une série $\sum u_n$ dont le terme général tend vers 0. On pose $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$. Montrer que $\sum_n u_n$ converge si et seulement si $\sum_n v_n$ converge. Conclure.

Critère d'Abel. Etudier la série de terme général $u_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}\ln n}$.

Critère de Cauchy. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum_n u_n$ converge. Monter que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.