Analyse PMCP. Feuille d'exercices 1

1. Étudier la convergence des suites suivantes. Dans le cas convergent, donner un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et calculer sa limite.

$$u_n = \frac{n^3 - \sqrt{(n+1)(n+2)}}{\ln n - 2n^2} \quad ; \quad u_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} \quad ;$$
$$u_n = \sqrt[3]{n^3+n+1} - \sqrt[3]{n^3-n+1} \quad ; \quad u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1} \quad ;$$
$$u_n = \frac{n(\sin n)^2 - (\cos n)^3}{n^2+1} \quad ; \quad u_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n} \quad ;$$
$$u_n = \ln\left(\sin\frac{1}{n}\right) \quad ; \quad u_n = \frac{1}{n} + \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \quad ;$$
$$u_n = \left(\left(3 + \frac{1}{n^2}\right)\arctan\frac{1}{n}\right) - \frac{3}{n} \quad ; \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de suite de nombres réels strictement positifs.
   (a) On suppose qu'il existe $0 < k < 1$, tel que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
   (b) On suppose qu'il existe $k > 1$, tel que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$. Montrer que dans ce cas, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
   (c) Utiliser ces critères pour étudier la convergence des suites de terme général x^n, $\frac{x^n}{n!}$, $\frac{n^\alpha}{n!}$ $(x, \alpha \in \mathbb{R})$.
   (d) Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors on ne peut pas conclure : la limite peut être 0, $+\infty$, un réel arbitraire dans $\mathbb{R}_+^*$, ou ne pas exister (on donnera un exemple pour chaque cas).

3. **Applications contractantes.** Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est *k-lipschitzienne* si
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|.$$
Si de plus $0 < k < 1$, alors on dit que f est *contractante*.
   (a) Donner un exemple non trivial d'application contractante.
   (b) Si f est de classe C^1 sur le segment $[a,b]$, montrer que f est lipschitzienne. La réciproque est-elle vraie ? **On suppose désormais f contractante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.**
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.
   (d) Soit $u_0 \in \mathbb{R}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n\,|u_1 - u_0|$.
   (e) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
   (f) On note l la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $l = f(l)$.

4. **Série harmonique.** On considère la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$. En déduire que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \sin u_n.$$

   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et calculer sa limite.

   (b) On pose $v_n = \frac{1}{(u_{n+1})^2} - \frac{1}{(u_n)^2}$. Donner la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on pourra utiliser un DL de la fonction sinus).

   (c) Que peut-on dire de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = \frac{v_1+\cdots+v_n}{n}$?

   (d) En déduire un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. **Série alternée.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante qui tend vers 0.

   (a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs ou nuls.

   (b) On pose $b_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Montrer que les deux suites $(b_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

7. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on définit une fonction f_n par l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ f_n(x) = x^n - nx + 1.$$

   (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions α_n et β_n, telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

   (b) Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle.

   (c) Montrer que $\alpha_n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$.

   (d) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $f_n(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}) \geqslant n$.

   (e) En déduire un encadrement de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et sa limite l.

   (f) Montrer que $n\ \ln \beta_n = \ln(n\beta_n - 1)$. Trouver un équivalent de $(\ln \beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et en déduire que

$$\beta_n - l \sim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}.$$