Université Paris-Sud

L2 Physique – Algèbre pour la Physique **Année 2015–2016**

TP4 – Systèmes différentiels

L'objectif de ce TP est d'étudier les graphes des solutions de systèmes différentiels. Un certain nombre de questions doivent être résolues théoriquement, c'est-à-dire sans utiliser Scilab. Ces questions sont marquées d'une étoile *.

On considère le système différentiel de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$X'(t) = AX(t), \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{S}$$

1. En utilisant les fonctions "spec" ou "bdiag" de scilab, donnez deux matrices P et D, avec D diagonale, telle que $A = PDP^{-1}$. Vérifiez que l'on a bien $A = PDP^{-1}$.

2. * On note $Y(t) = P^{-1}X(t)$, où $X(t)$ est une solution de (S). Vérifier que l'on a

   $$Y'(t) = DY(t). \tag{S$'$}$$

   On étudie donc dans un premier temps les solutions du système (S$'$). Quels sont les points d'équilibre, c'est-à-dire les solutions de (S$'$) qui ne dépendent pas de t ?

3. * Quelles sont les trajectoires rectilignes de (S$'$), c'est-à-dire les solutions de (S$'$) telles que $Y(t)$ appartienne à une même droite pour tout t ? On pourra écrire $Y(t) = \lambda(t)Y$ pour un certaine fonction $\lambda(t)$ à valeurs réelles, et pour un vecteur $Y \in \mathbb{R}^2$ fixe, puis trouver des conditions sur $\lambda(t)$ et Y en utilisant l'équation (S$'$). Dessiner les trajectoires de ces solutions sur une feuille de papier, pour t allant de $-\infty$ à $+\infty$.

4. Dans un script SciNotes à part, définir la fonction suivante

```
function Y=multD(t,X)

Y=D*X;

endfunction
```

puis l'éxécuter en faisant 'Éxécuter avec écho'. Écrire ensuite dans la console la commande

```
fchamp(multD,0,-10:10,-10:10)
```

qui trace le champ de vecteur défini par la matrice D. Ce champ de vecteur représente le champ des vitesses des solutions du système (S′): une solution à (S′) qui passe par un point P du plan, y passe avec un vecteur vitesse qui est la flèche accrochée au point P du graphe que l'on a tracé. On va illustrer ce fait dans la question suivante.

5. * Rappeler la forme générale des solutions au système (S′) donnée par le cours. En particulier, donner l'expression des solutions qui passent par les points $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-2,-1)$, $(2,3)$ en $t=0$.

6. On va représenter graphiquement les solutions trouvées à la question précédente, pour un temps t allant de -1 à 1. On commence donc par construire le vecteur `T=-1:0.1:1`. On pose `n=length(T)`. Pour une solution donnée $Y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$, on stocke les valeurs des abscisses $a(t)$ et des ordonnées $b(t)$ dans la matrice de taille $n \times 2$ suivante:

$$\begin{pmatrix} a(T(1)) & b(T(1)) \\ a(T(2)) & b(T(2)) \\ \vdots & \vdots \\ a(T(n)) & b(T(n)) \end{pmatrix}$$

Construire ainsi des matrices $Y1$, $Y2$, $Y3$, $Y4$ correspondant aux quatre solutions trouvées à la question précédente, puis les tracer à l'aide de la commande `plot2d`. On pourra superposer ces graphes avec celui du champ de vecteurs pour illustrer la remarque de la question 4. Pourquoi certaines courbes sont-elles plus "courtes" que d'autres ?

7. * Montrer que $X(t)$ est une trajectoire rectiligne de (S) si et seulement si $Y(t) = P^{-1}X(t)$ est une trajectoire rectiligne de (S′). En déduire les trajectoires rectilignes de (S).

   On a vu en question 2 que toute solution $X(t)$ de (S) pouvait s'écrire comme $X(t) = PY(t)$, où $Y(t)$ est une solution de (S′). On se sert de cette formule pour obtenir des solutions de (S) à partir des quatre solutions à (S′) obtenues en question 5.

8. Écrire une fonction `function X=multligne(Y,P)` dans un script SciNotes qui a deux matrices $Y \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ renvoie la matrice $X \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$, dont la $k^{\text{ième}}$ est $\left(P\begin{pmatrix} Y_{k,1} \\ Y_{k,2} \end{pmatrix}\right)^t$.

9. En utilisant la fonction `multligne`, calculez les matrices `X1=multline(Y1,P)`, `X2=multline(Y2,P)`, `X3=multline(Y3,P)`, et `X4=multline(Y4,P)`. Ces matrices correspondent à quelles solutions de (S) ? Que valent ces solutions en $t = 0$?

10. Tracer les courbes obtenues et tracer le champ de vecteur associé à la matrice A. Pour cela, on introduira une fonction `multA`, de manière similaire à la question 4.

    On a ainsi tracé quelques solutions du système différentiel (S) en diagonalisant la matrice A grâce à Scilab. On peut également laisser Scilab résoudre tout seul le système différentiel, à l'aide de la commande suivante.

11. Tester la commande `y=ode([3;0],0,0:0.1:1,multA)` dans Scilab (on pourra consulter l'aide au sujet la commande `ode` en tapant `help ode`). Ici, le vecteur `[3;0]` désigne la valeur en $t = 0$ de la solution à (S), et `y` renvoie cette solution évaluée aux temps `0:0.1:1`.

12. On peut également résoudre des systèmes différentiels qui ne sont pas linéaires grâce à Scilab. Par exemple, dans un script SciNotes, les commandes suivantes

```
function Y=f(t,X)
Y(1)=10*(X(2)-X(1));
Y(2)=X(1)*X(3)+28*X(1)-X(2);
Y(3)=X(1)*X(2)-(8/3)*X(3);
endfunction
y=ode([-3;6;12],0,0:0.01:100,f);
param3d(y(1,:),y(2,:),y(3,:))
```

    permettent de tracer une solution du système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 10(x-y) \\ y' = -xz + 28x - y \\ z' = xy - \frac{8}{3}z \end{cases}$$

    De la même manière, tracer une solution du système différentiel suivant:

$$\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = x + 0.2y \\ z' = 0.1 + z(x - 5.7) \end{cases}$$