Université Paris-Sud • L2 Physique

Math 259 : Algèbre pour la physique (2016–2017)

Feuille d'exercices 3

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants :

$$(a)\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad (b)\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}, \quad (c)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix},$$

$$(d)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad (e)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}.$$

2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer la matrice $A^t A$.

   (b) En déduire l'expression pour le déterminant de A.

3. Soit $A = (a_{jk}) \in M_n$ une matrice vérifiant $a_{jk} = -a_{kj}$ pout tous j et k. Montrer : si n est impair, alors le déterminant de A vaut zéro.

Exercice 3.

1. Calculer $\vec{a} \wedge \vec{b}$ pour :

   (a) $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, -3)$,

   (b) $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (3, 2, 1)$,

(c) $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$.

2. Montrer : pour tous $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ on a $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
3. A-t-on $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ pour tous $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$? Justifier la réponse !
4. Montrer : pour tous $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ on a $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} + (\vec{b} \wedge \vec{c}) \wedge \vec{a} + (\vec{c} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b} = 0$.
5. Montrer : pour tous $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ on a $[\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \wedge \vec{c}, \vec{c} \wedge \vec{a}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]^2$.

Exercice 4. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres pour les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit $A \in M_n$ une matrice à coefficients réels.

1. Montrer que les matrices A et A^t ont les mêmes valeurs propres.
2. Soit $\vec{v}$ un vecteur propre de A. Montrer que $\vec{v}$ est aussi un vecteur propre de A^n pour tout $n \geq 1$.
3. En déduire : si A est diagonalisable, alors toute puissance de A est aussi diagonalisable.
4. La réciproque est-elle vrai ?
5. Montrer que la matrice A^tA n'a pas de valeurs propres négatives. Indication : Montrer d'abord que $(A^tA\vec{x}) \cdot \vec{x} \geq 0$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
6. Soit A symétrique. Montrer : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs propres de A pour deux valeurs propres distinctes, alors $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$.
7. Soit $A^tA = I_n$. Montrer : si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda = \pm 1$.

Exercice 6. On munit $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1\bar{v}_1 + \cdot + u_n\bar{v}_n$. Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients complexes.

1. Monter : si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^n$, alors $(A\vec{u}) \cdot v = \vec{u} \cdot (A^*\vec{v})$.
2. Montrer que la matrice A^*A est autoadjointe.
3. Montrer que toutes les valeurs propres de cette matrice sont positives ou nulles.
4. Soit $A^*A = I_n$. Montrer : si λ est une valeur propre de A, alors $|\lambda| = 1$.