Université Paris-Sud • L2 Physique

Math 259 : Algèbre pour la Physique (2016–2017)

Feuille d'exercices 2

Exercice 1. On considère l'application linéaire $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$A(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 - x_2).$$

1. Cette application est-elle surjective, injective, bijective ?
2. Calculer la matrice de A dans la base canonique.
3. Montrer que les vecteurs $\vec{f_1} = (0, 1)$ et $\vec{f_2} = (1, 1)$ forment une base dans $\mathbb{R}^2$.
4. Calculer la matrice de A dans cette nouvelle base.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Soient $\vec{v}_1 = (1, 0)$ et $\vec{v}_2 = (2, 1)$. Montrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice N de f dans cette base.
2. Calculer N^m pour m entier positif quelconque.
3. Calculer la matrice de f^m dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. En déduire la matrice de f^m dans la base canonique.

Exercice 3. Soit $\vec{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non-nul et soit ℓ la droite engendrée par $\vec{p}$ et passant par l'origine. On définie une application $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ comme suit : $L(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ où (y_1, y_2) sont les coordonnées de la projection orthogonale du point (x_1, x_2) sur ℓ.

1. Trouver un vecteur non-nul $\vec{q}$ orthogonal à $\vec{p}$. (La réponse n'est pas unique !)
2. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{p}, \vec{q})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer la matrice de L dans cette base.
3. Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Calculer les matrices de passage $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}$.
4. En déduire la matrice de L dans la base $\mathcal{E}$.

Exercice 4. On considère l'application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie comme suit : $L(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ où le point (y_1, y_2) est symétrique à (x_1, x_2) par rapport à la droite $2x + 3y = 0$.

1. En utilisant cette définition géométrique, trouver deux vecteurs non-nuls $\vec{p}$ et $\vec{q}$ avec $L(\vec{p}) = \vec{p}$ et $L(\vec{q}) = -\vec{q}$. (La réponse n'est pas unique !)
2. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{p}, \vec{q})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer la matrice de L dans cette base.
3. Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Calculer les matrices de passage $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}$.
4. En déduire la matrice de L dans la base $\mathcal{E}$.

Exercice 5. Soit $n \geq 1$ fixé. On notera $\mathcal{E}$ la base canonique et $\mathcal{B}$ une base *orthonormée* quelconque dans $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Comment calcule-t-on les coordonnées $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$ en utilisant le produit scalaire ?
2. Montrer que la matrice de passage vérifie $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}} = (P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}})^t$.
3. En déduire : si P est une matrice de passage entre deux bases orthonormées, alors $P^{-1} = P^t$.
4. Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire qui vérifie $A(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot A(\vec{y})$ pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la matrice $M_{\mathcal{B}}(A)$ est symétrique.
5. Soit $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. On définie une application linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par $A(\vec{x}) = (\vec{p} \cdot \vec{x})\vec{p}$. Ecrire la matrice de A dans la base canonique.
6. On reprend l'exemple précédent avec $n = 2$. Donner l'interprétation géométrique de A en comparant avec l'exercice 3.

Exercice 6. Soit $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $A(\vec{v}_j) = \lambda_j \vec{v}_j$,

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (0, 1, 1), \quad \lambda_1 = -1, \\ \vec{v}_2 &= (1, 0, 1), \quad \lambda_2 = 0, \\ \vec{v}_3 &= (1, 1, 0), \quad \lambda_3 = 1. \end{aligned}$$

Trouver la matrice de A dans la base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$,

$$\vec{b}_1 = (1, 0, -1), \quad \vec{b}_2 = (1, -1, 0), \quad \vec{b}_3 = (0, 1, 1).$$