Université Paris-Sud • L2 Physique

Math 259 : Algèbre pour la Physique (2016–2017)

Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Déterminer si chacun des vecteurs e ci-dessous est combinaison linéaire des vecteurs e_1 et e_2 :

1. $e = (1, -3)$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, -3)$;
2. $e = (-2, 1)$, $e_1 = (3, -1)$, $e_2 = (1, 2)$;
3. $e = (0, -1)$, $e_1 = (2, -3)$, $e_2 = (-4, 6)$.

Exercice 2. On définit $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (4, 1, 4)$, $e_3 = (2, -1, 4)$.

1. Montrer que les familles (e_1, e_2), (e_1, e_3), et (e_2, e_3) sont libres dans $\mathbb{R}^3$.
2. La famille (e_1, e_2, e_3) est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3. Déterminer toutes les solutions des systèmes suivants en utilisant le pivot de Gauss.

$$(a) \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

Exercice 4. Calculer les inverses des matrices suivantes par le pivot de Gauss.

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Vérifier si les familles suivantes sont des bases dans $\mathbb{R}^n$:

1. $n = 3$, $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(1, 0, -1)$.
2. $n = 3$, $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$.
3. $n = 3$, $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$.
4. $n = 4$, $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(1, 2, 2, 1)$.
5. $n = 4$, $(1, 1, 1, -1)$, $(1, 1, -1, -1)$, $(1, -1, -1, -1)$, $(1, 1, 1, 0)$.

Exercice 6. Déterminer toutes les matrices carrées B qui commutent avec A (c.a.d. $AB = BA$) :

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.

1. Soient A et B deux matrices telles que les produits AB et BA sont bien définis et sont des matrices carrées de la même taille. Montrer que A et B sont des matrices carrées de la même taille.
2. La *trace* $\operatorname{tr}(A)$ d'une matrice carrée A est définie comme la somme des coefficients sur la diagonale. Démontrer : si A et B sont deux matrices telles que les produits AB et BA sont bien définis, alors $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
3. Peut-on trouver deux matrices A et B avec $AB - BA = I$ (I est la matrice identité) ?
4. Démontrer : une matrice A commute avec toutes les matrices diagonales de la taille n si et seulement si A est diagonale.
5. Démontrer : une matrice A commute avec toutes les matrices carrées de la taille n si et seulement si il existe un scalaire λ avec $A = \lambda I$.
6. Soit A une matrice diagonale telles que tous les coefficients sur la diagonale sont distincts. Décrire les matrices commutant avec A.