DEVOIR À LA MAISON: CORRIGÉ

Exercice 1.

1. On calcule directement les polynômes caractéristiques avec la règle de Sarus. On trouve alors :

$$\begin{aligned}
\chi_{M_1}(X) &= X^3 - 13 \cdot X^2 + 51 \cdot X - 63 &&= (X-7)(X-3)^2 \\
\chi_{M_2}(X) &= X^3 - 2 \cdot X^2 + X &&= X(X-1)^2 \\
\chi_{M_3}(X) &= X^3 - (a+2) \cdot X^2 + 2a \cdot X &&= X(X-2)(X-a)
\end{aligned}$$

2. Les valeurs propres sont donc :

– 7 et 3 pour M_1 ;

– 0 et 1 pour M_2 ;

– 0, 2 et a pour M_3.

3. La détermination des espaces propres passe par la résolution de système linéaires d'ordre 3. Si l'on note E^i_λ l'espace propre de M_i associé à la valeur propre λ, on trouve :

$$\begin{aligned}
E^1_7 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = z\} &&= \operatorname{vect}\{(0,1,1)\} \\
E^1_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\} &&= \operatorname{vect}\{(0,1,0),(1,0,1)\} \\
E^2_0 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, 2x = z\} &&= \operatorname{vect}\{(1,0,2)\} \\
E^2_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z, y = 2x\} &&= \operatorname{vect}\{(1,2,-1)\}
\end{aligned}$$

Les ensembles E^3_λ sont un peu plus subtiles à calculer, et dépendent de la valeur de a. On a les situations suivantes :

– si $a \notin \{0,2\}$, alors on a exactement trois valeurs propres (à savoir 0, 2 et a), et les espaces propres sont :

$$\begin{aligned}
E^3_0 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\} &&= \operatorname{vect}\{(1,0,0)\} \\
E^3_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} &&= \operatorname{vect}\{(0,0,1)\} \\
E^3_a &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z, ax = y\} &&= \operatorname{vect}\{(1,a,a)\}
\end{aligned}$$

– si $a = 0$, alors on a exactement deux valeurs propres (à savoir 0 et 2), et les espaces propres sont :

$$\begin{aligned}
E^3_0 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\} &&= \operatorname{vect}\{(1,0,0)\} \\
E^3_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} &&= \operatorname{vect}\{(0,0,1)\}
\end{aligned}$$

– si $a = 2$, alors on a exactement deux valeurs propres (à savoir 0 et 2), et les espaces propres sont :

$$\begin{aligned}
E^3_0 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\} &&= \operatorname{vect}\{(1,0,0)\} \\
E^3_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x\} &&= \operatorname{vect}\{(0,0,1),(1,2,2)\}
\end{aligned}$$

4. Une matrice est diagonalisable si et seulement si ses espaces propres sont supplémentaires. Comme on sait déjà que les espaces propres sont en somme directe, cela revient à regarder si la somme de leurs dimensions vaut bien la dimension de l'espace tout entier (ici 3). Ceci revient aussi à voir que, pour tout λ, la dimension de l'espace propre associé à λ est égale à la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique.

Du fait de la question 3., on déduit que :

– la matrice M_1 est diagonalisable ;
– la matrice M_2 n'est pas diagonalisable ;
– la matrice M_3 est diagonalisable si et seulement si $a \neq 0$.

5. Dans cette question, il y a un tout petit soucis sur les notations (il y a la même erreur dans le cours de Christian, avec la confusion entre la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{E}$ et son inverse. Histoire de lever toute ambiguïté, je définis la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{E}$ comme étant l'unique matrice inversible, notée $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}$, qui vérifie :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) \cdot (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}})^{-1}$$

(et suivant ces notations on a $(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}})^{-1} = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$).

Pour les matrices diagonales précédentes, on donne les matrices de passage :

– pour M_1 : on pose $\mathcal{B} = ((0,1,1),(0,1,0),(1,0,1))$. On a :

$$P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et (après calcul) on trouve bien que la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}} M_1 P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$ est diagonale.

– pour M_3 : M_3 est diagonalisable pour $a \neq 0$, et on pose $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,0,1),(1,a,a))$. On a :

$$P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad et \quad P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1/a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

et (après calcul) on trouve bien que la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}} M_3 P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$ est diagonale. Notons au passage que l'on retrouve bien la condition que a doit être non nul, sans quoi la matrice $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$ ne serait pas inversible (et la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}$ ne serait pas définie à cause des termes en $1/a$).

Exercice 2.

Il y avait une petite erreur dans l'énoncé, et il faut supprimer la dernière colonne de la matrice pour que l'énoncé ait un sens.

1. Montrons par récurrence que l'on a :

$$\det(V_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Initialisation : si $n = 1$ c'est évident, car on a alors $V_1 = (1)$, et $\det(V_1) = 1$ qui vérifie bien la formule (avec la convention que le produit vide vaut 1).

Hérédité : considérons la matrice V_n. Pour i allant de 2 à n, on peut effectuer l'opération élémentaire sur les colonnes : $C_i \leftarrow C_i - \alpha_1 \cdot C_1$ (qui ne change pas le déterminant). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\det(V_n) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) & \dots & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_1) \\ 1 & \alpha_3-\alpha_1 & \alpha_3(\alpha_3-\alpha_1) & \dots & \alpha_3^{n-2}(\alpha_3-\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_n-\alpha_1 & \alpha_n(\alpha_n-\alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n-\alpha_1) \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) & \dots & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_1) \\ \alpha_3-\alpha_1 & \alpha_3(\alpha_3-\alpha_1) & \dots & \alpha_3^{n-2}(\alpha_3-\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n-\alpha_1 & \alpha_n(\alpha_n-\alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n-\alpha_1) \end{vmatrix} \\
&= \left(\prod_{1<i\leq n} (\alpha_i-\alpha_1) \right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{n-2} \\ 1 & \alpha_3 & \dots & \alpha_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence.

2. La matrice V_n est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. DU fait de la formule trouvée en question 1., on en déduit que V_n est inversible si et seulement si tous les α_i sont distincts, c'est-à-dire si V_n ne possède pas deux lignes égales.