Université Paris-Sud • L2 Physique

Math 259 : Algèbre pour la physique (2016–2017)

Devoir Maison 2 (pour le mercredi 7 décembre)

Exercice 1.
On définit les matrices suivantes, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pour chacune des matrices données, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer le polynôme caractéristique.
2. Déterminer les valeurs propres.
3. Déterminer une base de chaque sous-espace propre.
4. Déterminer si la matrice est diagonalisable.
5. Pour $i = 1, 2, 3$, si la matrice M_i est diagonalisable, déterminer une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice M_i est diagonale. Déterminer les matrices de passages $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}$ et $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$, où $\mathcal{E}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Vérifier que $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} M_i P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}$ est diagonale.

Indication : pour la matrice M_3 il peut y avoir plusieurs cas dépendant de la valeur de a.

Exercice 2. Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ n réels et V_n la matrice de Vandermonde définie par

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^n \\ & & & \dots & \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{bmatrix}$$

1. Calculer par récurrence le déterminant de la matrice V_n.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que V_n soit inversible.