DEVOIR À LA MAISON: CORRIGÉ

Exercice 1.

1. En appliquant le pivot de Gauss, on trouve

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+z=1 \\ 4x+y+3z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-4L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-z=2 \\ -3y+3z=-3 \\ -3y+7z=-5 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=2-y+z \\ y=1+z \\ 4z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1/2 \\ z=-1/2. \end{cases}$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note S_α l'ensemble des solutions au système. Pour résoudre le système, on peut commencer par l'étape

$$\begin{cases} \alpha x+y+z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ x+y+\alpha z=1 \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1-\alpha L_2 \\ L_3\leftarrow L_3-L_2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (1-\alpha^2)y+(1-\alpha)z=1-\alpha \\ x+\alpha y+z=1 \\ (1-\alpha)y+(\alpha-1)z=0. \end{cases}$$

On arrive donc à une distinction de cas selon les valeurs de α : dans le premier cas, si $\alpha=1$, le système est donc équivalent à $x+y+z=1$. On a donc

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y+z=1\} \\ &= \{(1-y-z,y,z),\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \{(1,0,0)+y(-1,1,0)+z(-1,0,1),\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= (1,0,0)+\mathbb{R}(-1,1,0)+\mathbb{R}(-1,0,1), \end{aligned}$$

et on voit que S_1 est un plan affine dans $\mathbb{R}^3$. Dans le second cas, si $\alpha\neq 1$, on peut diviser par $1-\alpha$ les lignes 1 et 3 du système pour arriver à

$$\begin{cases} (1+\alpha)y+z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ z=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2+\alpha)y=1 \\ x=1-(1+\alpha)y \\ z=y \end{cases}$$

Si $\alpha=-2$, la première ligne implique $0=1$, ce qui est absurde : dans ce cas, le système n'a pas de solution. On a donc

$$S_{-2}=\emptyset.$$

Si $\alpha\neq-2$, on trouve $y=1/(2+\alpha)=x=z$, donc

$$S_\alpha=\left\{\left(\frac{1}{\alpha+2},\frac{1}{\alpha+2},\frac{1}{\alpha+2}\right)\right\}.$$

Pour résumer, on a donc montré que

$$S_\alpha=\begin{cases} (1,0,0)+\mathbb{R}(-1,1,0)+\mathbb{R}(-1,0,1) & \text{si}\,\alpha=1, \\ \emptyset & \text{si}\,\alpha=-2, \\ \left\{\left(\frac{1}{\alpha+2},\frac{1}{\alpha+2},\frac{1}{\alpha+2}\right)\right\} & \text{si}\,\alpha\neq-2,\ \alpha\neq1. \end{cases}$$

Exercice 2.

Comme A est déjà triangulaire supérieure, on fait les opérations suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \substack{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{array}$$

et on a donc montré que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

Si $AM = I_3$, en particulier AM est une matrice à 3 lignes et 3 colonnes, et sachant que A est une matrice à 3 lignes et 2 colonnes, on déduit que M est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes. Posons donc

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix}.$$

Le fait que $AM = I_3$ est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} 3m_{11} + 4m_{21} = 1, & 3m_{12} + 4m_{22} = 0, \quad 3m_{13} + 4m_{23} = 0, \\ 2m_{11} + 3m_{21} = 0, & 2m_{12} + 3m_{22} = 1, \quad 2m_{13} + 3m_{23} = 0, \\ m_{11} + m_{21} = 0, & m_{12} + m_{22} = 0, \quad m_{13} + m_{23} = 1. \end{cases}$$

Si l'on retire 3 fois la relation $m_{11} + m_{21} = 0$ à la relation $3m_{11} + 4m_{21} = 1$, on obtient $m_{21} = 1$, alors que si l'on retire 2 fois la relation $m_{11} + m_{21} = 0$ à la relation $2m_{11} + 3m_{21} = 0$, on obtient $m_{21} = 0$, ce qui est absurde. Le système n'a pas donc pas de solution, et il n'existe pas de matrice M telle que $AM = I_3$.

Si $NA = I_2$, alors en particulier NA est une matrice à 2 lignes et 2 colonnes. Comme A possède 3 lignes et 2 colonnes, cela signifie que N possède 2 lignes et 3 colonnes : posons donc

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \end{pmatrix}.$$

La relation $NA = I_2$ est équivalente au système suivant

$$\begin{cases} 3n_{11} + 2n_{12} + n_{13} = 1 \\ 4n_{11} + 3n_{12} + n_{13} = 0 \\ 3n_{21} + 2n_{22} + n_{23} = 0 \\ 4n_{21} + 3n_{22} + n_{23} = 1 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3n_{11} + 2n_{12} + n_{13} = 1 \\ n_{11} + n_{12} = -1 \\ 3n_{21} + 2n_{22} + n_{23} = 0 \\ n_{21} + n_{22} = 1 \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} n_{11} + n_{13} = 3 \\ n_{11} + n_{12} = -1 \\ n_{21} + n_{23} = -2 \\ n_{21} + n_{22} = 1. \end{cases}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}
\{N,\, NA = I_2\} &= \left\{ \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \end{pmatrix},\, n_{11}+n_{13}=3, n_{11}+n_{12}=-1, n_{21}+n_{23}=-2, n_{21}+n_{22}=1 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} n_{11} & -1-n_{11} & 3-n_{11} \\ n_{21} & 1-n_{21} & -2-n_{21} \end{pmatrix},\, (n_{11},n_{21}) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On voit que l'ensemble des solutions est paramétré par deux nombres réels n_{11} et n_{21}, que l'on peut choisir quelconques. Comme deux choix différents de n_{11} et n_{21} mènent à deux matrices N différentes, on a bien une infinité de matrices N possibles.

Exercice 4.

1. Comme (e_1, e_2, e_3) est une famille de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'elle est libre pour montrer que c'est une base. Soit donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$. Cette relation est équivalente au système suivant

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_2 \\ \lambda_3 = -2\lambda_1 = 6\lambda_2 \\ -9\lambda_2 + 2\lambda_2 + 6\lambda_2 = -\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Ainsi, la famille (e_1, e_2, e_3) est libre et est donc une base $\mathbb{R}^3$.

2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a en développant par rapport à la première ligne

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 0 \times \det \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} + t \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} = 1 - t^2.$$

Le déterminant est donc nul si et seulement si $t = 1$ ou $t = -1$, et donc si t n'est pas égal à ces valeurs, la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. On a

$$\begin{aligned}
F &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\; x_1 + 2x_2 = 0\} \\
&= \{(-2x_2, x_2, x_3, x_4),\; (x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \{x_2(-2,1,0,0) + x_3(0,0,1,0) + x_4(0,0,0,1),\; (x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \mathrm{vect}((-2,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)).
\end{aligned}$$

La famille $((-2,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ est une base de F : le calcul précédent montre qu'elle est génératrice et il est clair qu'elle est aussi libre. F possède donc une base comportant 3 éléments, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3.