DEVOIR À LA MAISON

Pour le 12 octobre 2016

Exercice 1.

1. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 2, \\ 2x - y + z = 1, \\ 4x + y + 3z = 3. \end{cases}$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel quelconque. Résoudre (selon les valeurs de α) le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1, \\ x + \alpha y + z = 1, \\ x + y + \alpha z = 1. \end{cases}$$

   Attention : l'ensemble des solutions peut varier lorsque α varie.

Exercice 2. Déterminer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il n'existe pas de matrice M telle que $AM = I_3$, mais qu'il existe une infinité de matrices N telles que $NA = I_2$. (I_3 désigne la matrice identité de taille 3×3 et I_2 désigne la matrice identité de taille 2×2).

On pourra dans un premier temps s'intéresser uniquement à la taille de telles matrices N et M.

Exercice 4.

1. Soient $e_1 = (1, 2, 3)$, $e_2 = (3, 0, 2)$, $e_3 = (0, 1, 1)$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$ un réel quelconque, on définit $u_1 = (1, 0, t)$, $u_2 = (1, 1, t)$, et $u_3 = (t, 0, 1)$. Pour quelles valeurs de t la famille (u_1, u_2, u_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ x_1 + 2x_2 = 0\}.$$

   Quelle est la dimension de F ? Donner une base de F.